



# Effet sur le bruit de jet de l'excitation de modes instables : Rôle des interactions non linéaires

Maxime Itasse

## ► To cite this version:

Maxime Itasse. Effet sur le bruit de jet de l'excitation de modes instables : Rôle des interactions non linéaires. Acoustique [physics.class-ph]. Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace, 2015. Français. NNT: . tel-01280759

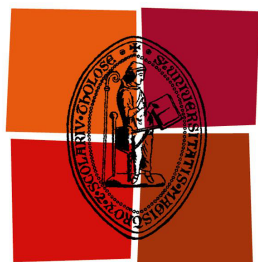
**HAL Id: tel-01280759**

**<https://theses.hal.science/tel-01280759>**

Submitted on 1 Mar 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Université  
de Toulouse

# THÈSE

En vue de l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par : *l'Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace (ISAE)*

---

---

Présentée et soutenue le 1<sup>er</sup> décembre 2015 par :

**Maxime ITASSE**

Effet sur le bruit de jet de l'excitation de modes instables :  
Rôle des interactions non linéaires

---

---

## JURY

PR. Y. GERVAIS  
PR. J.-C. ROBINET  
PR. C. AIRIAU  
DR. J. HUBER  
DR. P. JORDAN  
DR. J.-PH. BRAZIER  
PR. G. CASALIS

Institut PPrime  
ENSAM/DynFluid  
IMFT  
Airbus Operations  
Institut Pprime  
ONERA/DMAE  
ONERA/DMAE

Rapporteur  
Rapporteur  
Président du jury  
Examineur  
Examineur  
Directeur de Thèse  
Co-directeur de Thèse

---

École doctorale et spécialité :

*MEGEP : Dynamique des fluides*

Unité de Recherche :

*Équipe d'accueil ISAE-ONERA EDyF*

Directeur(s) de Thèse :

*Jean-Philippe Brazier et Grégoire Casalis*

Rapporteurs :

*Yves Gervais et Jean-Christophe Robinet*



# Remerciements

**J**E tiens à exprimer mes plus vifs remerciements aux nombreuses personnes dont la générosité, le soutien et l'intérêt manifestés à l'égard de mon travail de thèse m'ont permis de mener ce projet à son terme.

Avant toute chose, je remercie chaleureusement mes directeurs de thèse, JEAN-PHILIPPE BRAZIER et GRÉGOIRE CASALIS pour leur dévouement, leur expérience et la confiance qu'ils m'ont accordée au cours de ces trois années. Je tiens également à leur témoigner toute ma reconnaissance pour leurs qualités scientifiques, techniques et humaines qui ont été les clés de la réussite de ce travail doctoral.

Ces années passées au Centre de Toulouse de l'ONERA ont été pour moi un réel plaisir et je remercie PIERRE MILLAN, directeur du Département Modèles pour l'Aérodynamique et l'Énergétique, de m'avoir accueilli dans son laboratoire et de m'avoir permis de réaliser cette thèse dans les meilleures conditions. Je remercie également DANIEL ARNAL et ESTELLE PIOT, chefs de l'unité Instabilités, Transition et Acoustique où j'ai eu la chance de travailler.

Mes remerciements vont également à l'ensemble des membres du jury pour leur lecture très attentive et leurs remarques précieuses. Je remercie YVES GERVAIS et JEAN-CHRISTOPHE ROBINET pour avoir accepté d'être rapporteurs et pour la pertinence de leurs commentaires. Je souhaite remercier CHRISTOPHE AIRIAU pour avoir accepté la présidence du jury de thèse ainsi que les autres membres du jury : JÉRÔME HUBER et PETER JORDAN. J'ai eu la chance de soutenir ma thèse devant un tel jury, je garderai à jamais en mémoire ce jour du 1<sup>er</sup> décembre 2015 où j'ai pris un immense plaisir à défendre et à échanger sur mes travaux. Encore une fois, un immense merci à l'ensemble des membres du jury.

J'aimerais également remercier l'ensemble du personnel de l'ONERA qui m'a permis d'évoluer dans un environnement agréable. Un grand et chaleureux merci aux matinaux : MARIE, SIMONE, NICOLAS, FRANCIS, JONATHAN, PIERRE B. et PIERRE M.. Pendant 3 ans, j'ai commencé mes journées par des fous rires et je vous en remercie infiniment ! Un grand merci aux doctorants, vous contribuez énormément à l'excellente ambiance



---

qui règne au DMAE. Plus spécialement, je remercie Jonathan et Vincent pour leur soutien, leur bonne humeur et leur humour. Nous avons commencé et terminé nos thèses ensemble. Je me suis tout simplement régalé à vos côtés, encore merci pour votre enthousiasme et votre joie de vivre. J'exprime aussi toute ma reconnaissance à Valérie et Corinne pour leur patience pour ce qui était de mes sollicitations administratives.

Je ne peux oublier ceux qui m'ont soutenu avant même d'avoir commencé la thèse, je parle du personnel de l'ISAE. J'ai passé des moments merveilleux à vos côtés et si j'en suis là aujourd'hui c'est en partie grâce à vous alors un grand merci à vous tous : CHRISTIANE, PATRICK M., MARC, RÉMI, SERGE, PATRICK C., PHILIPPE M., PHILIPPE B., ROGER, SÉBASTIEN, EMMANUEL, VALÉRIE, ALLAN, JÉRÉMIE, GUILLAUME, LAURENT et JEAN-MARC.

Mes derniers remerciements vont à ma famille et à mes amis qui, depuis toujours, ont assuré un soutien affectif sans faille. Je ne remercierai jamais assez mes parents et ma sœur qui sont ma plus grande fierté. Enfin, je ne peux finir ces remerciements sans avoir une tendre pensée pour Anaïs qui a tout fait pour m'aider, me soutenir et me supporter.

Milles mercis encore une fois à tous pour m'avoir conduit à ce jour mémorable.

MAXIME

---

## Effet sur le bruit de jet de l'excitation de modes instables : Rôle des interactions non linéaires

### Résumé

Cette étude s'inscrit dans l'effort de réduction des nuisances sonores des avions au décollage. Une des principales composantes est le bruit de jet, dont la partie à basse fréquence peut notamment être imputée au rayonnement acoustique directif des structures cohérentes de grande échelle engendrées par les instabilités dans la couche de mélange du jet. L'évolution de ces ondes d'instabilité peut être décrite au moyen des Équations de Stabilité Parabolisées (PSE). Un premier objectif a été de déterminer si dans le cas d'un jet turbulent naturel, les interactions non linéaires entre les ondes d'instabilité ont un impact significatif sur sa dynamique et sur son rayonnement acoustique. À cet effet, une modélisation PSE non linéaire a été développée et appliquée à une configuration réaliste. La possibilité de manipuler ces ondes d'instabilité par non linéarité a ensuite été étudiée en vue d'une réduction du rayonnement acoustique. Pour cela, une analyse PSE a été menée pour déterminer l'effet sur le bruit de jet de l'excitation d'un ou plusieurs modes instables. Ces travaux de thèse ont permis de montrer, d'une part, que les non linéarités semblent avoir un impact mineur sur la dynamique des ondes d'instabilité dans le cas des jets turbulents naturels, et d'autre part, qu'il est possible de réduire le rayonnement acoustique des modes dominants par interactions non linéaires.

**Mots-clés :** aéroacoustique, bruit de jet, jet turbulent, structures cohérentes de grande échelle, ondes d'instabilité, équations de stabilité parabolisées, interactions non linéaires.

---

## Effect of unstable modes excitation on jet noise: The role of nonlinear interactions

### Abstract

This study is part of the effort to reduce aircraft noise during take-off. Jet noise is one of the main contributors, of which lower frequency component can be attributed to the directive acoustic field generated by the large-scale coherent structures arising from jet mixing-layer instabilities. The development of these instability waves can be described using Parabolized Stability Equations (PSE). A first objective was to determine if in the case of a natural turbulent jet, nonlinear interactions between instability waves have a significant impact on its dynamic and acoustic behaviour. For this purpose, a nonlinear PSE model has been developed and applied to a realistic configuration. Then, the possibility to manipulate these instability waves by means of nonlinearity was investigated with a view to reduce noise. To this end, a PSE analysis has been carried out to assess the impact on jet noise of exciting one or more unstable modes. The findings of this doctoral work demonstrate a minor impact of nonlinearities on the dynamics of instability waves for natural turbulent jets on the one hand, and the possibility to make the initially dominant instability acoustically ineffective using nonlinear interactions on the other hand.

**Keywords:** aeroacoustics, jet noise, turbulent jet, large-scale coherent structures, instability waves, parabolized stability equations, nonlinear interactions.

---



# Table des matières

Liste des Figures	xi
Liste des Tableaux	xv
Nomenclature	xvii
Introduction	1
<b>1 État de l'art</b>	<b>5</b>
1.1 Structure générale des jets . . . . .	6
1.1.1 Tuyères et origine des écoulements de type jets . . . . .	6
1.1.2 Une configuration commune . . . . .	7
1.1.3 Dynamique des jets et turbulence . . . . .	8
1.1.4 Structures cohérentes et instabilités . . . . .	10
1.2 L'aéroacoustique des jets . . . . .	12
1.2.1 Les composantes du bruit de jet . . . . .	12
1.2.2 Le bruit de mélange turbulent . . . . .	13
1.2.3 Le bruit de choc large-bande . . . . .	15
1.2.4 Le bruit de raie . . . . .	18
1.3 Modélisation et prévision du bruit de jet . . . . .	20
1.3.1 Analogies acoustiques . . . . .	20
1.3.2 Spectre de similitude . . . . .	23
1.3.3 Simulation numérique du bruit de jet . . . . .	25
1.4 Analyse de la stabilité des jets . . . . .	27
1.4.1 Stabilité locale . . . . .	27
1.4.2 Méthode des échelles multiples . . . . .	30
1.4.3 Équations de stabilité parabolisées (PSE) . . . . .	33
1.5 Stratégies de contrôle pour la réduction du bruit de jet . . . . .	37
1.5.1 Les principes d'action . . . . .	37
1.5.2 Contrôle passif des sources acoustiques . . . . .	38
1.5.3 Dispositifs actifs de contrôle continu . . . . .	40
1.5.4 Dispositifs actifs de contrôle instationnaire . . . . .	43
<b>2 Modélisation des instabilités hydrodynamiques des jets par les PSE dans un contexte non linéaire</b>	<b>47</b>
2.1 Développement des équations du mouvement perturbées . . . . .	48

2.1.1	Les équations de Navier-Stokes . . . . .	48
2.1.2	Formulation adimensionnelle des équations de Navier-Stokes . . . .	49
2.1.3	Détermination du champ de base . . . . .	50
2.1.4	Discussion sur l'importance des termes visqueux . . . . .	52
2.1.5	Les équations d'Euler perturbées . . . . .	53
2.1.6	Projection des équations perturbées dans le repère cylindrique . .	53
2.2	Développement des PSE dans un contexte faiblement non linéaire . . . .	55
2.2.1	Forme modale des perturbations . . . . .	55
2.2.2	Discussion sur les modes stationnaires . . . . .	56
2.2.3	Symétries du problème . . . . .	57
2.2.4	Formulation matricielle du système PSE . . . . .	57
2.2.5	Nature du système PSE . . . . .	59
2.2.6	Condition de normalisation . . . . .	60
2.2.7	Conditions initiales . . . . .	62
2.2.8	Conditions aux limites sur l'axe . . . . .	64
2.2.9	Conditions aux limites en champ lointain . . . . .	66
2.3	Résolution du système PSE non linéaire . . . . .	67
2.3.1	Discretisation du domaine de calcul . . . . .	67
2.3.2	Détermination des termes non linéaires . . . . .	68
2.3.3	Approximation des dérivées axiales . . . . .	70
2.3.4	Approximation des dérivées radiales . . . . .	71
2.3.5	Résolution du système . . . . .	72
<b>3</b>	<b>Analyse d'un jet subsonique par les approches PSE linéaires et non linéaires</b>	<b>77</b>
3.1	Présentation des résultats expérimentaux et numériques existants sur le jet étudié . . . . .	78
3.1.1	Caractéristiques du jet . . . . .	78
3.1.2	Dispositif expérimental . . . . .	78
3.1.3	Simulation aux grandes échelles (LES) . . . . .	80
3.2	Analyse PSE linéaire des fluctuations de pression en champ proche . . . .	81
3.2.1	Interpolation du champ de base sur le maillage PSE . . . . .	81
3.2.2	Analyse PSE linéaire . . . . .	83
3.2.3	Comparaison des résultats PSE et LES avec les mesures . . . . .	86
3.3	Propagation en champ lointain des perturbations de pression . . . . .	91
3.3.1	Méthode de propagation par surface de Kirchhoff . . . . .	91
3.3.2	Comparaison des directivités acoustiques . . . . .	92
3.4	Étude de l'impact des interactions non linéaires avec les PSE . . . . .	94
3.4.1	Détermination de l'amplitude initiale réelle des modes . . . . .	94
3.4.2	Effet de l'amplitude initiale des modes . . . . .	95
3.4.3	Validation du calcul des Termes Non Linéaires . . . . .	97
3.4.4	Analyse PSE non linéaires et impact des interactions modales . . .	97
<b>4</b>	<b>Effet de l'excitation de modes instables avec les PSE non linéaires</b>	<b>103</b>
4.1	PSE analysis of nonlinear interactions with forced eigenmodes to control subsonic jet instabilities . . . . .	103
4.2	Complément à l'article : Excitation d'un mode sous-harmonique . . . . .	127

<b>5 Développement des PSE linéaires adjointes et application à des cas d'études simples</b>	<b>131</b>
5.1 Modélisation PSE linéaires adjointes . . . . .	132
5.1.1 Optimisation et multiplicateurs de Lagrange . . . . .	132
5.1.2 Contexte de l'étude de sensibilité à l'aide des PSE adjointes . . . .	133
5.1.3 Équations d'Euler linéarisées compressibles adjointes . . . . .	134
5.1.4 Développement et résolution des PSE linéaires adjointes . . . . .	136
5.2 Applications simples du modèle PSE adjoint . . . . .	140
5.2.1 Principe de la validation . . . . .	140
5.2.2 Caractéristiques du jet incompressible . . . . .	140
5.2.3 Stabilité locale adjointe . . . . .	141
5.2.4 Analyse par PSE adjointes d'un écoulement parallèle incompressible	143
5.2.5 Analyse par PSE adjointes d'un jet incompressible . . . . .	144
<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>149</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>153</b>



# Table des figures

1.1	Modes de fonctionnement d'une tuyère . . . . .	7
1.2	Strioscopie d'un jet subsonique à $M_j = 0.3$ et $Re_d = 3.5 \times 10^5$ réalisée par Bradshaw <i>et al.</i> (1964) . . . . .	7
1.3	Schéma d'un jet subsonique faisant apparaître les différentes zones caractéristiques et le cône potentiel (inspiré de Léon (2012)). . . . .	8
1.4	Stroboscopie d'un jet initialement laminaire pour un $Re_d = 1.5 \times 10^4$ réalisée par Freymuth (1966) . . . . .	9
1.5	Strioscopie d'un jet libre à $Re_d = 1.05 \times 10^4$ réalisée par Crow et Champagne (1971) . . . . .	10
1.6	Mécanisme du développement initial de l'instabilité de couche de mélange et de l'enroulement en tourbillons discrets, extrait de Winant et Browand (1974) . . . . .	11
1.7	Schéma de la structure d'un jet en transition, extrait de Yule (1978) . . .	12
1.8	Spectre d'intensité acoustique d'un jet froid supersonique non adapté à $M_j = 1.67$ mesuré en amont de la tuyère à $\vartheta = 150^\circ$ par Norum et Seiner (1982) . . . . .	13
1.9	Niveaux de pression en champ proche mesurés par Yu et Dosanjh (1972) (a) et directivité acoustique en champ lointain et effet de température extrait de Tanna (1977) (b) pour des jets supersoniques adaptés en pression à $M_j = 1.5$ et $M_j = 1.4$ respectivement . . . . .	14
1.10	Strioscopie d'un jet d'hélium supersonique issue des travaux de Tam (1971)	15
1.11	Niveaux de pression en champ proche d'un jet sous-détendu à $M_j = 1.5$ réalisés par Yu et Dosanjh (1972) (a) et comparaison des directivités acoustiques en champ lointain d'un jet adapté en pression à $M_j = 1.4$ (●) et de son homologue sous-détendu (○) extrait de Tanna (1977) (b) . . . .	16
1.12	Comparaison des niveaux de pression d'un jet adapté en pression (●) et d'un jet hors adaptation (○) en fonction de la vitesse d'éjection pour des angles d'observation de $\vartheta = 30^\circ$ (a) et $\vartheta = 90^\circ$ (b) extrait de Tanna (1977)	17
1.13	Strioscopie moyennée sur 8 images d'un jet sous-détendu et mise en évidence des cellules de choc, figure issue des travaux de André <i>et al.</i> (2010) . . . .	17
1.14	Spectre d'intensité acoustique du bruit de choc large-bande d'un jet froid supersonique non-adapté à $M_j = 1.67$ pour différents angles d'observation, réalisé par Norum et Seiner (1982) . . . . .	18
1.15	Mise en évidence de la boucle de rétroaction à l'origine du bruit de raie par strioscopie d'un jet supersonique rectangulaire à $M_j = 1.5$ d'après Raman (1997) . . . . .	19



1.16	Diagrammes de directivité en champ lointain du fondamental (a) et de la première harmonique (b) du bruit de raie d'un jet froid supersonique à $M_j = 1.49$ , réalisés par Norum (1983) . . . . .	20
1.17	Spectres de similitude des deux composantes du bruit de mélange. ( — ) : spectre associé aux structures de grande échelle et ( - - - ) : spectre associé aux petites échelles de la turbulence d'après Tam <i>et al.</i> (1996) . . . . .	24
1.18	Comparaison des spectres de similitude de Tam <i>et al.</i> (1996) ( — ) et des mesures réalisées par Ahuja (1973) ( $\circ$ ) sur un jet froid subsonique pour $M_j = 0.98$ pour les structures à grande échelle à $\vartheta = 20^\circ$ (a) et les petites structures à $\vartheta = 90^\circ$ (b) . . . . .	24
1.19	Illustration des réponses impulsionnelles d'une instabilité convective (a) et d'une instabilité absolue (b) extraite de Huerre et Monkewitz (1985). . . . .	27
1.20	Comparaison du facteur d'amplification (a) et de la vitesse de phase (b) issus des mesures ( $\circ$ ) et de la stabilité locale en théorie spatiale ( — ) et temporelle ( - - - ) extraite des travaux de Crow et Champagne (1971). ( $\bullet$ ) correspond au maximum d'amplification du mode dominant mesuré expérimentalement. . . . .	30
1.21	Contours des niveaux de pression en champ proche d'un jet excité à un nombre de Strouhal $St = 0.2$ mesurés expérimentalement par Trouitt et McLaughlin (1982) (a) et calculés par Tam et Burton (1984b) (b). . . . .	32
1.22	Amplitudes et angles de phase des perturbations de pression à $St = 0.35$ sur l'antenne linéaire positionnée en champ proche d'un jet froid subsonique $M_j = 0.9$ , ( $\circ$ ) : Mesures, ( $\square$ ) : 1er mode POD et ( — ) Résultats PSE d'après Gudmundsson et Colonius (2011) . . . . .	35
1.23	Photographie d'une tuyère double-flux de type short-cowl (a) et définition de sa géométrie (b) extrait de Tinney et Jordan (2008) . . . . .	37
1.24	Densité de probabilité bidimensionnelle de localisation de source acoustique sur une section perpendiculaire à l'axe d'un jet supersonique à $M_j = 1.3$ pour une tuyère classique (a) et l'ajout de deux onglets (b), extrait de Hileman (2004) . . . . .	39
1.25	Photographie de tuyères à chevrons réalisée par Bridges et Brown (2004) . . . . .	40
1.26	Photographie (a) et vue axiale schématique (b) d'une tuyère équipée d'un système de contrôle par jets fluidiques extrait de Laurendeau <i>et al.</i> (2008) . . . . .	42
1.27	Photographies des systèmes de contrôle par 36 micro-jets de 1 mm de diamètre (a) et par 16 micro-jets avec tuyères amovibles (b) extrait de Castelain <i>et al.</i> (2008) . . . . .	42
2.1	Visualisation par le critère $\lambda_2 = -0.09$ d'un champ de vitesse instantanée issu d'un calcul DNS (a), de l'écoulement de base (b) et des signaux temporels des fluctuations de vitesse axiale mesurées en deux points de l'espace (c) et (d) sur les cas (a) et (b), extrait de Bagheri <i>et al.</i> (2009). . . . .	51
2.2	Maillage structuré bidimensionnel rectiligne raffiné autour de $r/d = 0.5$ . . . . .	68
2.3	Organigramme de résolution du système PSE non linéaire . . . . .	75
3.1	Photographies du matériel de mesures acoustiques (a) et de la tuyère $d = 0.08$ m (b) dans la soufflerie anéchoïque CEPRA 19 de l'ONERA, extrait de Lorteau <i>et al.</i> (2013). . . . .	79
3.2	Coupe du maillage dans le plan $x = 0$ où seulement un point sur cinq est représenté, extrait de Lorteau (2015). . . . .	80

3.3	Contours de vitesse axiale moyenne extrait du calcul LES réalisé par Lorteau (2015).	82
3.4	Profils à $x/d = 0.3$ du gradient radial de vitesse axiale moyenne avant (a) et après (b) application du filtre compact d'ordre six proposé par Lele (1992).	83
3.5	Profils moyens à $x/d = 0.3$ de vitesse axiale (a), de vitesse radiale (b) et de masse volumique (c); (—) Reconstruction sur maillage PSE; (o) Données LES.	83
3.6	Spectre de stabilité obtenu pour $m = 0$ et $St = 0.36$ à l'abscisse initiale $x/d = 0.3$ ; (o) valeurs propres du système; (●) modes de Kelvin-Helmholtz	84
3.7	Fonctions propres issues de l'analyse de stabilité locale pour $m = 0$ et $St = 0.36$ à la station initiale $x/d = 0.3$ ; (—) Partie réelle; (- - -) Partie imaginaire.	85
3.8	Contours de la partie réelle (a) et de l'amplitude (b) des fluctuations de pression obtenus par les PSE pour le mode $m = 0$ et $St = 0.36$ .	86
3.9	Amplitude des fluctuations de pression à $r/d = 0.5$ pour les modes $m = 0$ (a), $m = 1$ (b) et $m = 2$ (c).	86
3.10	Amplitudes des fluctuations de pression à $r/d = 0.5$ du mode axisymétrique (a) et du premier mode azimutal (b) sur une large gamme de fréquence; (o) $St = 0.36$ ; ( $\Delta$ ) $St = 0.42$ .	87
3.11	Comparaison de l'amplitude des fluctuations de pression à $r/d = 1.5$ pour le mode $m = 0$ à différents nombres de Strouhal; (o) Données expérimentales; (- - -) Résultats LES; (—) Prévisions PSE.	88
3.12	Comparaison de l'amplitude des fluctuations de pression à $r/d = 1.5$ pour le mode $m = 1$ à différents nombres de Strouhal; (o) Données expérimentales; (- - -) Résultats LES; (—) Prévisions PSE.	89
3.13	Comparaison de l'amplitude des fluctuations de pression à $r/d = 0.5$ pour les modes $m = 0$ et $m = 1$ à différents nombres de Strouhal; (—) PSE linéaires; (- - -) LES.	90
3.14	Profil radial de la perturbation de pression en champ proche à $x/d = 3.0$ ; PSE linéaires (—); Propagation acoustique (- - -).	93
3.15	Niveau de pression acoustique propagé en champ lointain à $r/d = 75$ issu du calcul PSE linéaire (—), de la simulation LES (- - -) et des mesures ( $\diamond$ ).	93
3.16	Comparaison de l'évolution axiale du facteur N obtenue par PSE non linéaires pour différentes amplitudes initiales $\varepsilon_{m,n} = 10^{-5}$ (o); $10^{-4}$ (●); $10^{-3}$ ( $\Delta$ ); PSE linéaires (—).	96
3.17	Parties réelles et imaginaires des termes non linéaires $TNL_{0,1}^{(1)}$ , $TNL_{0,1}^{(2)}$ , $TNL_{0,1}^{(3)}$ et $TNL_{0,1}^{(5)}$ calculées par transformée de Fourier (o) et analytiquement (—) en $x/d = 6.0$ .	98
3.18	Comparaison de l'évolution axiale du facteur N obtenue par PSE non linéaires (o) avec les amplitudes initiales issues du calcul LES; PSE linéaires (—).	100
3.19	Évolution axiale des amplitudes de pression en $r/d = 0.5$ obtenues par PSE non linéaires (o) avec les amplitudes initiales issues du calcul LES; PSE linéaires (—).	101
4.1	Evolution du facteur N lors de l'excitation du mode (0, 1); PSE linéaires (—); PSE non linéaires (o).	128

4.2	Amplitude de pression à $r/d = 0.5$ (a) et niveau de pression acoustique à $r/d = 25$ (b) du mode « cible » $St = 0.4$ et niveau de pression global (c) ; PSE linéaires (—) ; PSE non linéaires ( $\circ$ ). . . . .	128
5.1	Profil initial (a) et contours (b) de la vitesse axiale moyenne. . . . .	140
5.2	Spectre de stabilité locale obtenu pour $m = 0$ et $St = 0.5$ à l'abscisse initiale $x/d = 0.0$ ; ( $\triangle$ ) valeurs propres directes ; ( $\nabla$ ) valeurs propres adjointes. . . . .	142
5.3	Fonctions propres issues de l'analyse de stabilité locale adjointe pour $m = 0$ et $St = 0.5$ à la station initiale $x/d = 0.0$ ; (—) Partie réelle ; (- - -) Partie imaginaire. . . . .	143
5.4	Parties réelle (a) et imaginaire (b) du nombre d'onde axial ; ( $\triangle$ ) PSE directes ; ( $\nabla$ ) PSE adjointes. . . . .	144
5.5	Spectre de stabilité obtenu pour $m = 0$ et $St = 0.5$ à l'abscisse $x/d = 2.0$ ; ( $\nabla$ ) valeurs propres adjointes. . . . .	145
5.6	Fonctions propres issues de l'analyse de stabilité locale adjointe pour $m = 0$ et $St = 0.5$ à la station $x/d = 2.0$ ; (—) Partie réelle ; (- - -) Partie imaginaire. . . . .	145
5.7	Parties réelle (a) et imaginaire (b) du nombre d'onde axial ; ( $\triangle$ ) PSE directes ; ( $\nabla$ ) PSE adjointes. . . . .	146
5.8	Contours de la partie réelle des variables adjointes (a) $u_x^*$ , (b) $u_r^*$ , (c) $\rho^*$ et (d) $p^*$ issues de l'analyse par PSE adjointes pour $m = 0$ et $St = 0.5$ . . . . .	147

# Liste des tableaux

3.1	Point de fonctionnement de la configuration étudiée. . . . .	78
3.2	Amplitudes des niveaux de pression extraits des données LES en $r/d = 0.5$ et amplitudes initiales équivalentes pour le mode axisymétrique ( $m = 0$ ). .	94
3.3	Amplitudes des niveaux de pression extraits des données LES en $r/d = 0.5$ et amplitudes initiales équivalentes pour le premier mode azimutal ( $m = 1$ ). .	94
3.4	Amplitudes initiales du mode axisymétrique ( $m = 0$ ) à différentes fréquences correspondant aux Fig. 3.18 et 3.19. . . . .	99
3.5	Amplitudes initiales du premier mode azimutal ( $m = 1$ ) à différentes fréquences correspondant aux Fig. 3.18 et 3.19. . . . .	99
4.1	Amplitude et phase initiale de tous les modes. . . . .	127



# Nomenclature

## Symboles romains

$c$	célérité du son
$d$	diamètre de la tuyère
$e$	énergie interne
$f$	fréquence
$\mathcal{J}$	fonction coût
$\mathcal{L}$	Lagrangien
$l$	longueur caractéristique des structures de grande échelle
$M_j$	nombre de Mach du jet en sortie de tuyère
$m$	nombre d'onde azimutal
$n$	ordre de l'harmonique fréquentielle
$Pr$	nombre de Prandtl
$p$	pression statique
$\mathbf{q}$	vecteur des variables de l'écoulement instantané
$\bar{\mathbf{q}}$	vecteur des variables de l'écoulement de base
$\mathbf{q}'$	vecteur des variables des fluctuations
$Re_d$	nombre de Reynolds basé sur le diamètre de la tuyère
$r$	position radiale
$S$	entropie
$St$	nombre de Strouhal
$U_j$	vitesse du jet en sortie de tuyère
$u_r$	vitesse radiale
$u_x$	vitesse axiale
$u_\theta$	vitesse azimutale
$T$	température statique
$t$	temps
$x$	position axiale

## Symboles grecs

$\alpha$	nombre d'onde axial
$\delta_{ij}$	symbole de Kronecker
$\varepsilon_{m,n}$	amplitude initiale associée au mode $(m, n)$
$\eta$	échelle de Kolmogorov
$\theta$	position azimutale
$\vartheta$	angle d'observation
$\mu$	viscosité dynamique
$\rho$	masse volumique
$\phi_{m,n}$	phase initiale associée au mode $(m, n)$
$\omega$	pulsation temporelle

## Indices

$j$	variable prise en sortie de buse
$r$	projection dans la direction radiale $r$
$x$	projection dans la direction axiale $x$
$m, n$	variable correspondant au mode $(m, n)$
$\theta$	projection dans la direction azimutale $\theta$

## Exposants

*	variable dimensionnelle
★	variable adjointe
†	complexe conjugué
$H$	complexe conjugué de la matrice transposée

## Acronymes

DNS	Direct Numerical Simulation
LES	Large Eddy Simulation
PNS	Parabolized Navier-Stokes
POD	Proper Orthogonal Decomposition
PSE	Parabolized Stability Equations
RANS	Reynolds Averaged Navier-Stokes
SPL	Sound Pressure Level
TNL	Termes Non Linéaires

# Introduction

AVEC la hausse du trafic aérien, la pollution sonore aux abords des aéroports représente une gêne considérable qu'il convient de maîtriser et de réduire. À ce titre, les normes internationales pour la certification acoustique des avions de transport sont de plus en plus strictes. En Europe, l'*Advisory Council for Aeronautics Research* (ACARE) a fixé un objectif ambitieux d'une réduction de 50 % (-3 dB) du bruit perçu de 2000 à 2020, objectif porté à 65 % à l'horizon 2050. Afin de répondre à ces restrictions de plus en plus sévères, l'industrie aéronautique a cherché à identifier les sources sonores à l'origine du rayonnement acoustique intense des avions de transport. L'interaction de la turbulence avec des parois comme la soufflante, le train d'atterrissage et les dispositifs hypersustentateurs est la principale source de bruit à l'atterrissage. Au décollage, en revanche, les jets sortant des turboréacteurs contribuent majoritairement au bruit des avions. Dans l'optique d'une réduction globale des nuisances sonores aéroportuaires, une action sur le rayonnement acoustique des jets est donc essentielle. Pour cela, une étude fine des mécanismes de génération du bruit des jets est primordiale.

Par des mesures acoustiques en champ lointain sur un jet subsonique turbulent, [Mollo-Christensen et al. \(1964\)](#) ont souligné deux types d'émissions acoustiques : l'une à haute fréquence uniforme dans toutes les directions, l'autre à basse fréquence très directive en aval de l'écoulement. L'existence d'un tel pic de directivité a alors suggéré la présence d'une source turbulente cohérente sous-jacente. Cette hypothèse a été confirmée par les expériences de [Crow et Champagne \(1971\)](#). En effet, ces derniers ont réussi à mettre en évidence la présence de structures cohérentes de grande échelle dans un jet turbulent par un forçage acoustique aux lèvres de la tuyère. Par la même occasion, ils ont dévoilé la possibilité d'altérer le comportement dynamique d'un jet à l'aide d'une perturbation extérieure. Dès lors, les structures cohérentes de grande échelle ont été désignées comme une source acoustique potentielle du rayonnement directif des jets dans la direction aval. Cependant, malgré le développement des moyens numériques et expérimentaux, les différents mécanismes responsables du rayonnement acoustique



intense des jets en champ lointain ne sont toujours pas totalement élucidés. En particulier, si la turbulence à petite échelle est reconnue comme majoritairement responsable du bruit à haute fréquence, le rôle des structures cohérentes de grande échelle sur le champ acoustique n'est toujours pas clairement établi. Une telle difficulté émane de la dynamique complexe de la turbulence liée à cet écoulement dont les mécanismes physiques sont largement non linéaires et instationnaires.

Dans le but d'isoler la contribution des structures cohérentes, une méthode basée sur l'étude de la stabilité des écoulements cisailés, proposée par Bertolotti et Herbert (1991) et Herbert (1994, 1997) semble néanmoins fournir des résultats satisfaisants. Cette approche consiste à assimiler ces structures à des ondes d'instabilité et à réaliser une décomposition modale à l'aide des Équations de Stabilité Parabolisées (PSE). Par une approche PSE linéaire, Piot *et al.* (2006) et Gudmundsson et Colonius (2011) ont notamment réalisé des comparaisons satisfaisantes avec des résultats expérimentaux et des simulations aux grandes échelles (LES) dans le cas des jets subsoniques et supersoniques. Ces études ont permis de mettre en évidence l'existence et la contribution importante des structures cohérentes non seulement dans l'hydrodynamique mais également dans l'acoustique des jets. Toutefois, si cette approche est appliquée à des configurations de plus en plus complexes, comme les jets double-flux traités par Léon (2012) et Léon et Brazier (2013), la prise en compte des effets non linéaires reste relativement récente.

Dans l'optique d'un contrôle du bruit, une première approche consiste à modifier la dynamique des structures turbulentes par un épaississement de la couche de mélange. Ceci est rendu possible par l'utilisation de divers dispositifs : tuyère dentelée ou lobée, micro-jets pulsés ou continus, à la lèvre de la tuyère ou sur le corps central. Des études laissent cependant penser que l'excitation de certains modes propres du jet pourrait permettre, par non linéarité, de réduire le bruit engendré par d'autres modes propres instables du jet. Mais encore faut-il savoir comment exciter correctement le jet pour en réduire le bruit et non l'augmenter.

C'est ce qui justifie cette étude. Elle consiste à mettre en évidence le rôle des interactions non linéaires entre les ondes d'instabilité dans le rayonnement acoustique des jets, qu'ils soient naturels ou excités, afin de proposer une stratégie de contrôle pour la réduction du bruit de jet au moyen des PSE non linéaires.

Après une présentation détaillée des travaux de recherche menés sur le bruit de jet (Chapitre 1), la démarche a consisté dans un premier temps à développer l'approche des équations de stabilité parabolisées (PSE) dans un contexte faiblement non linéaire. Pour cela, le modèle PSE linéaire réalisé précédemment par Léon (2012) a été étendu pour prendre en compte les interactions possible entre modes. Deux méthodes de calcul distinctes des termes non linéaires ont été développées afin d'en assurer la validité. Les méthodes de résolution numérique ont été adaptées à la problématique (Chapitre 2). L'étape suivante a consisté à déterminer si les interactions non linéaires entre les ondes

d'instabilité ont un impact sur la dynamique et le rayonnement acoustique des jets naturels. Pour cela, les modèles PSE linéaires et non linéaires ont été appliqués à une configuration de jet de référence. Les résultats obtenus en champ proche et en champ lointain ont été comparés aux données expérimentales et numériques existantes (Chapitre 3). Par la suite, la possibilité d'altérer par non linéarité le comportement dynamique et acoustique des ondes d'instabilité des jets a été étudiée. Pour cela, une analyse par PSE non linéaires d'un jet excité par un ou plusieurs modes propres a été menée. Ce chapitre a fait l'objet d'une publication, [Itasse \*et al.\* \(2015\)](#), parue dans la revue scientifique *Physics of Fluids* (Chapitre 4). Une dernière étape a été de déterminer les zones de l'écoulement les plus sensibles à une perturbation extérieure. Pour cela, une technique d'optimisation basée sur la théorie de l'opérateur adjoint a été appliquée au modèle PSE linéaire. Cette modélisation a ensuite été appliquée à quelques cas d'études simples (Chapitre 5).



## État de l'art

UNE revue bibliographique sur l'aéroacoustique des jets est présentée dans cette partie. L'objectif est d'apporter les bases nécessaires à une bonne compréhension de la problématique posée dans ce manuscrit. L'analyse des phénomènes physiques des jets est réalisée en premier lieu afin de définir par la suite les différentes composantes du rayonnement acoustique de ces écoulements particuliers. L'élaboration d'une stratégie efficace de réduction du bruit nécessite une analyse fine du champ aérodynamique proche des jets. Ainsi, les principales méthodes de prévision sont mises en avant, allant des approches empiriques aux simulations numériques directes. Un accent tout particulier est porté sur les méthodes d'analyse de la stabilité des écoulements qui semblent prometteuses pour l'étude du rayonnement acoustique des instabilités hydrodynamiques. La dernière partie quant à elle se concentre sur les stratégies envisagées et les dispositifs existants pour contrôler les écoulements de type jet et réduire, dans la mesure du possible, leur rayonnement acoustique.

### Sommaire

<b>1.1</b>	<b>Structure générale des jets</b>	<b>6</b>
1.1.1	Tuyères et origine des écoulements de type jets	6
1.1.2	Une configuration commune	7
1.1.3	Dynamique des jets et turbulence	8
1.1.4	Structures cohérentes et instabilités	10
<b>1.2</b>	<b>L'aéroacoustique des jets</b>	<b>12</b>
1.2.1	Les composantes du bruit de jet	12
1.2.2	Le bruit de mélange turbulent	13
1.2.3	Le bruit de choc large-bande	15
1.2.4	Le bruit de raie	18
<b>1.3</b>	<b>Modélisation et prévision du bruit de jet</b>	<b>20</b>
1.3.1	Analogies acoustiques	20
1.3.2	Spectre de similitude	23
1.3.3	Simulation numérique du bruit de jet	25
<b>1.4</b>	<b>Analyse de la stabilité des jets</b>	<b>27</b>
1.4.1	Stabilité locale	27
1.4.2	Méthode des échelles multiples	30
1.4.3	Équations de stabilité parabolisées (PSE)	33
<b>1.5</b>	<b>Stratégies de contrôle pour la réduction du bruit de jet</b>	<b>37</b>
1.5.1	Les principes d'action	37
1.5.2	Contrôle passif des sources acoustiques	38
1.5.3	Dispositifs actifs de contrôle continu	40
1.5.4	Dispositifs actifs de contrôle instationnaire	43

## 1.1 Structure générale des jets

### 1.1.1 Tuyères et origine des écoulements de type jets

La tuyère est un organe du groupe propulsif qui a pour but de délivrer une poussée maximale, si possible à tous les régimes de vol, en réalisant une détente optimale des gaz de combustion. Toutefois, l'estimation des performances d'une tuyère ne se limite pas au seul calcul de la poussée : une compréhension fine de l'écoulement aval, qui constitue le jet, est également nécessaire.

Comme illustré sur la Fig. 1.1 où les effets visqueux ont été négligés dans un premier temps, le mode de fonctionnement de la tuyère a une forte influence sur les caractéristiques aérodynamiques du jet. Dans le cas où l'on fixe la pression de sortie  $p_s$  et la température totale  $T_i$  et que seule la pression génératrice amont  $p_{i_0}$  est variable, le col ne sera sonique que si la pression génératrice amont est suffisante. Jusqu'à l'amorçage du col ( $M_{col} = 1$ ), l'écoulement reste entièrement subsonique dans l'ensemble du divergent et dans le jet Fig. 1.1(a). Une augmentation de la pression génératrice amont va ensuite engendrer toute une série d'écoulements comportant un choc interne à la tuyère, lequel va progresser vers l'aval jusqu'à se positionner exactement en section de sortie Fig. 1.1(b, c). Le divergent devient alors entièrement supersonique sans choc, le jet externe reste quant à lui subsonique. Par la suite, la compression nécessaire en sortie s'atténue, le choc devient oblique et le jet est alors qualifié de supersonique sur-détendu. Sous certaines conditions, une réflexion non régulière peut apparaître sur l'axe de la tuyère, provoquant la formation d'un disque de Mach à l'origine de pertes de poussée non négligeables Fig. 1.1(d) de par une augmentation significative de la traînée d'onde. Pour une valeur spécifique de la pression totale amont, les chocs vont disparaître. La notion d'adaptation est couramment utilisée pour qualifier ces conditions particulières où la pression du jet en section de sortie est égale à la pression ambiante Fig. 1.1(e). Ce point de fonctionnement correspond au point de poussée optimal. Toute augmentation supplémentaire de la pression génératrice aura pour effet de former un ensemble de faisceaux d'ondes de détente qui se focaliseront en un choc après réflexion sur la surface de glissement Fig. 1.1(f). De manière similaire au cas sur-détendu, le jet est alors qualifié de sous-détendu.

Dans la réalité, les effets visqueux sont bel et bien présents, des interactions ont lieu entre les chocs et la couche limite se développant sur la paroi interne de la tuyère, pouvant générer des décollements. De même, la frontière entre le jet et l'air extérieur ne présente pas une discontinuité mais une zone de raccord progressif. Néanmoins, cette approche simplifiée permet de classer et d'illustrer la grande disparité des écoulements de type jet.

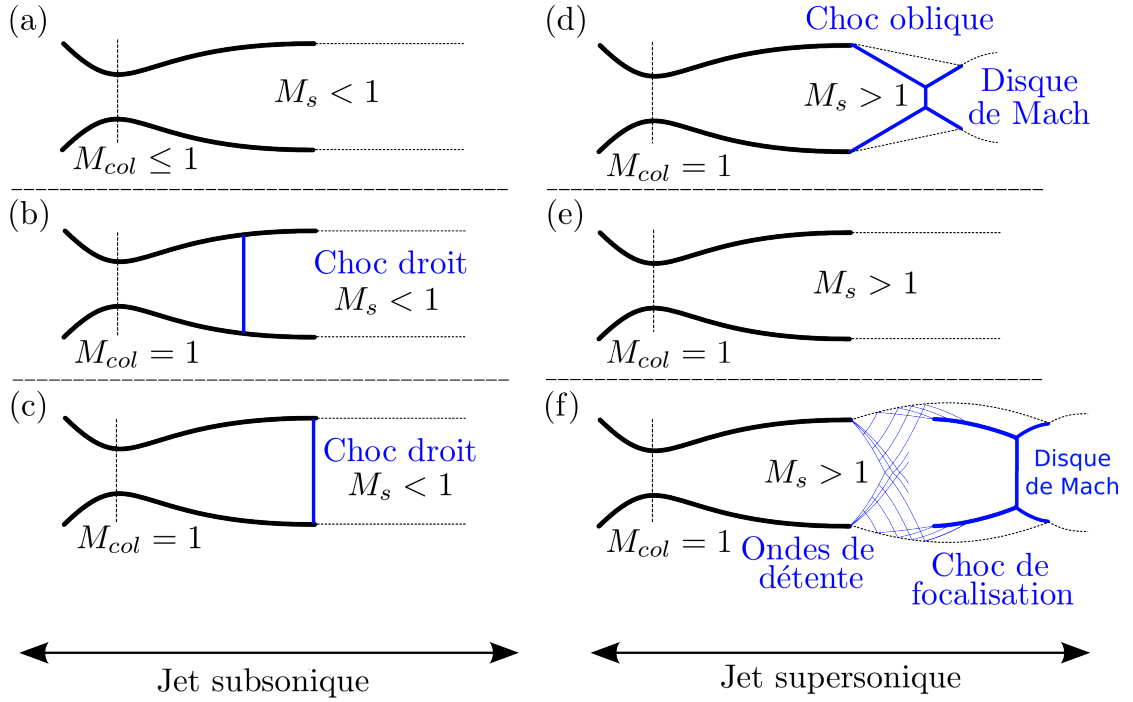
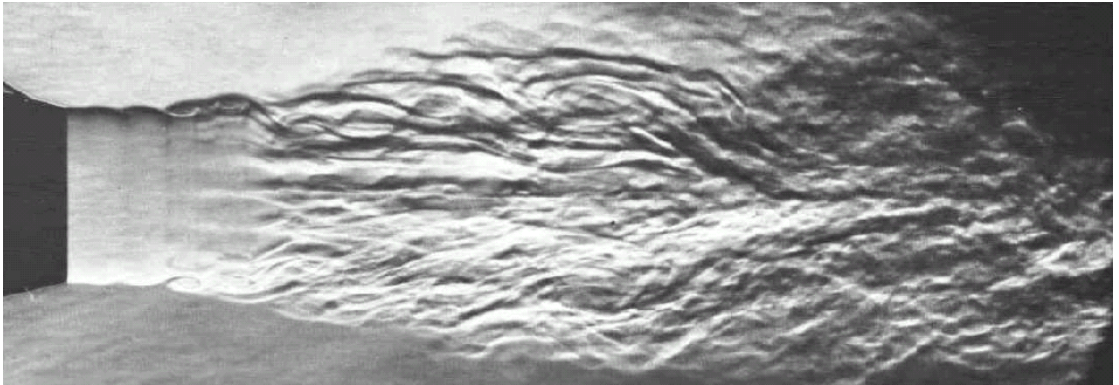


FIGURE 1.1 : Modes de fonctionnement d'une tuyère

### 1.1.2 Une configuration commune

En plus de cette disparité liée aux modes de fonctionnement de la tuyère, le caractère turbulent de l'écoulement est à l'origine d'une dynamique complexe, non-linéaire et instationnaire. Une strioscopie d'un jet subsonique issue des travaux de Bradshaw *et al.* (1964) est présentée sur la Fig. 1.2 afin de mettre en évidence le caractère *a priori* chaotique et désordonné de ces écoulements. Toutefois, des traits communs à l'ensemble des jets existent, qu'ils soient subsoniques ou supersoniques.


FIGURE 1.2 : Strioscopie d'un jet subsonique à  $M_j = 0.3$  et  $Re_d = 3.5 \times 10^5$  réalisée par Bradshaw *et al.* (1964)

L'interaction entre l'air extérieur et l'écoulement à grande vitesse issu de la tuyère est communément décomposée en trois zones distinctes, comme schématisé sur la Fig. 1.3.

La première, appelée zone de mélange, correspond au développement initial du jet. Par un mécanisme d'entraînement du fluide, la vitesse axiale, nulle à l'extérieur du jet, croît rapidement dans la couche dite de mélange jusqu'à atteindre une valeur maximale constante sur l'axe du jet. Cette couche de mélange, à l'origine du développement de la turbulence, est donc le siège de forts gradients radiaux. De par l'épaississement de cette zone cisailée dans la direction aval du jet, l'écoulement uniforme et irrotationnel proche de l'axe de la tuyère tend à se réduire. Dans le cas des tuyères cylindriques, cette zone prend la forme d'un cône, d'où la dénomination de « cône potentiel » pour caractériser cette région spécifique de l'écoulement. La disparition du plateau de vitesse, lieu de la rencontre des couches de mélange, traduit la fin de la zone de mélange et le début de la zone de transition. Plus en aval, on trouve la zone pleinement développée, également appelée zone d'auto-similarité. En effet, les profils moyens de vitesse axiale peuvent y être décrit par des lois de similitude.

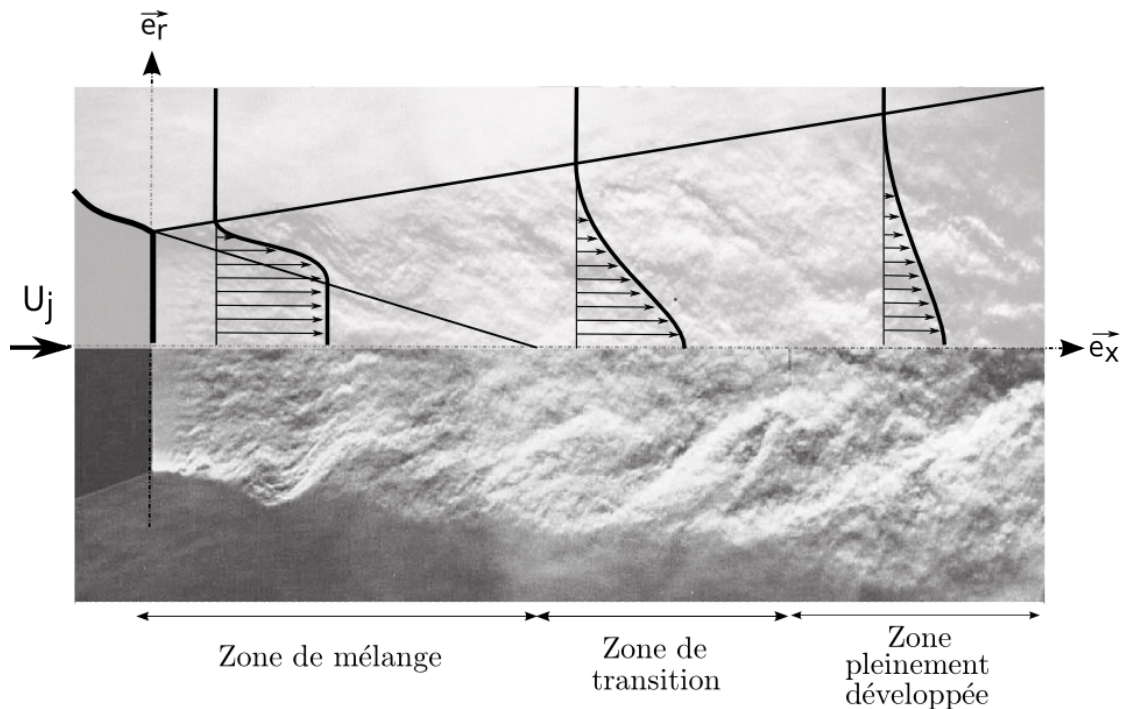


FIGURE 1.3 : Schéma d'un jet subsonique faisant apparaître les différentes zones caractéristiques et le cône potentiel (inspiré de [Léon \(2012\)](#)).

### 1.1.3 Dynamique des jets et turbulence

La dynamique des jets ainsi que le bruit qui en est issu sont intimement liés aux caractéristiques de la turbulence. A la fin des années 1950, alors que la turbulence était considérée comme un phénomène purement chaotique, l'expérience novatrice de [Franklin et Foxwell \(1958\)](#) a montré l'existence d'une corrélation spatiale du champ de pression grâce à des mesures en deux points des fluctuations de pression dans le champ



proche d'un jet froid. Cette découverte a alors remis en cause le caractère entièrement non-déterministe de la turbulence. Quelques années plus tard, [Bradshaw \*et al.\* \(1964\)](#) et [Freythuth \(1966\)](#) ont confirmé ces résultats en mettant en évidence l'existence de structures cohérentes de grande échelle dans le cas de jets initialement laminaires, comme visualisé sur la Fig. 1.4. Déjà en 1964, [Bradshaw \*et al.\* \(1964\)](#) suggéraient qu'une action extérieure sur l'évolution de ces composantes à grande échelle pourrait réduire le niveau de bruit rayonné. Toutefois, si à bas nombre de Reynolds le développement des petites échelles de la turbulence est limité par les effets visqueux, pour des nombres de Reynolds élevés la présence de structures cohérentes de grande échelle ainsi que leur rôle d'un point de vue de l'acoustique restaient encore à démontrer.

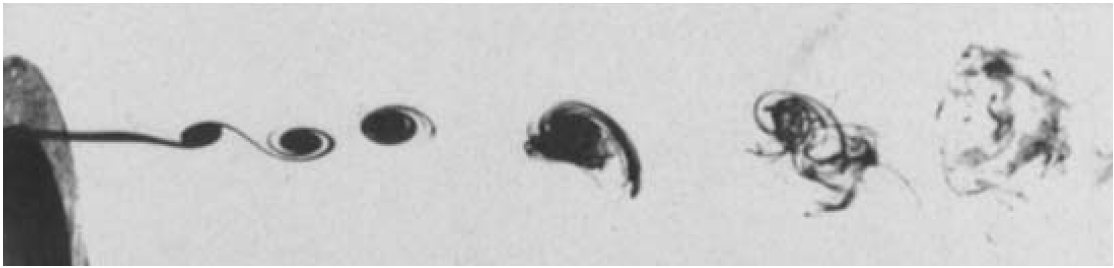


FIGURE 1.4 : Stroboscopie d'un jet initialement laminaire pour un  $Re_d = 1.5 \times 10^4$  réalisée par [Freythuth \(1966\)](#)

Une étude qui a permis de quantifier le rayonnement acoustique des jets turbulents est celle de [Mollo-Christensen \*et al.\* \(1964\)](#). Ils ont réalisé des mesures de pression acoustique en chambre anéchoïque pour trois diamètres de buse et trois nombres de Mach d'éjection  $M_j = U_j/c_j$ , avec  $U_j$  et  $c_j$  la vitesse et la célérité du son en sortie de tuyère. Une attention toute particulière a été donnée à l'élimination des sources de bruit parasite. Le calcul de densités spectrales de puissance acoustique et les mesures de directivité en champ lointain ont ainsi permis de découvrir la présence d'un pic marqué en aval du jet pour un nombre de Strouhal  $St = f \cdot d/U_j$  autour de 0.30. L'existence d'une telle fréquence a ainsi suggéré la présence d'une source turbulente cohérente sous-jacente qui serait en partie responsable du bruit rayonné. De même, deux types d'émission acoustique ont été soulignés, l'une à basse fréquence et l'autre à haute fréquence. Ces mécanismes semblaient fortement liés aux structures se développant dans la couche de mélange du jet.

Dans le but d'isoler les différentes composantes turbulentes des jets, la réponse d'un jet soumis à un forçage acoustique aux lèvres de la tuyère, piloté en amplitude et en fréquence, a été étudiée expérimentalement par [Crow et Champagne \(1971\)](#). L'effet du forçage sur le comportement dynamique du jet a été observé par stroboscopie et mesuré par anémométrie par fil chaud. Un exemple de leurs nombreuses visualisations est représenté sur la Fig. 1.5. Sur cette stroboscopie, l'émergence d'une composante à grande échelle est indéniable de par la présence de structures tourbillonnaires périodiques. Ils



ont ainsi montré qu'il était possible d'agir sur la dynamique des jets turbulents à l'aide d'une source sonore extérieure. Plus précisément, ils expliquent que le forçage génère une onde fondamentale qui croît d'abord en amplitude, avant d'être ralentie par l'émergence d'une onde harmonique jusqu'à atteindre une amplitude de saturation. Cette amplitude de saturation est fortement dépendante de la fréquence de forçage du jet. Dans les expériences de [Crow et Champagne \(1971\)](#), un maximum est obtenu, une fois de plus, pour un nombre de Strouhal  $St = 0.30$ . Cette fréquence particulière, appelée fréquence privilégiée, apparaît donc naturellement dominante dans les écoulements de type jet subsonique.

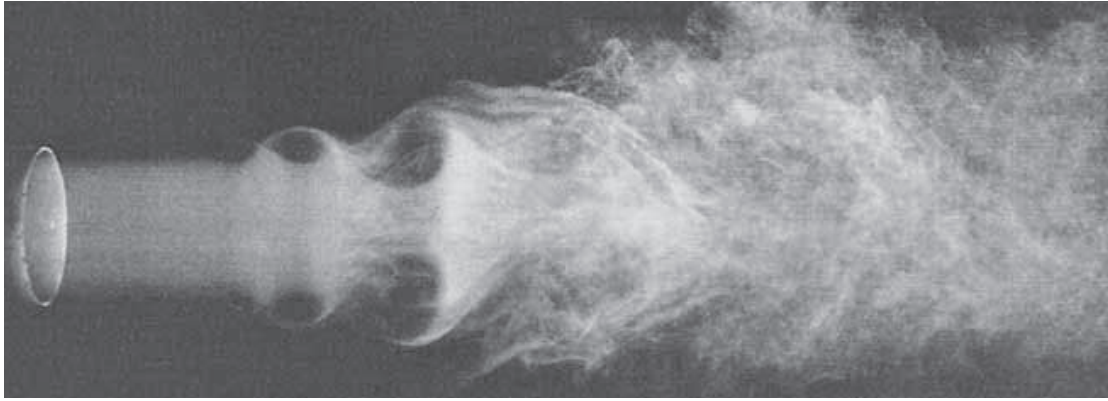


FIGURE 1.5 : Strioscopie d'un jet libre à  $Re_d = 1.05 \times 10^4$  réalisée par [Crow et Champagne \(1971\)](#)

#### 1.1.4 Structures cohérentes et instabilités

Si la définition même d'une structure dite cohérente reste litigieuse, la formation de telles structures à l'interface entre le jet et le milieu environnant est dorénavant admise.

Pour étudier le mécanisme de formation de ces structures, [Winant et Browand \(1974\)](#) ont assimilé le champ proche d'un jet à bas nombre de Reynolds à une couche de mélange axisymétrique naissante et ont réalisé des mesures par film chaud pour extraire des profils de vitesses moyennes et fluctuantes d'une couche de mélange bidimensionnelle en tunnel hydrodynamique. La fine couche de mélange issue de la confluence des deux écoulements est naturellement instable de par l'inflexion du profil de vitesse. Les perturbations présentes au sein de l'écoulement viennent exciter et déformer cette interface, comme schématisé sur la Fig. 1.6(a). Ainsi, la couche de mélange s'épaissit et s'affine périodiquement Fig. 1.6(b) jusqu'à atteindre un seuil critique Fig. 1.6(c) où la crête de l'onde la plus rapide se rabat dans le creux de l'onde aval, et réciproquement. Par un processus d'enroulement tourbillonnaire à grande échelle, une série de tourbillons discrets Fig. 1.6(d) vient ainsi se former. Les structures cohérentes à grande échelle sont donc le fruit de cette instabilité inflexionnelle, non visqueuse, communément appelée instabilité primaire de Kelvin-Helmholtz.

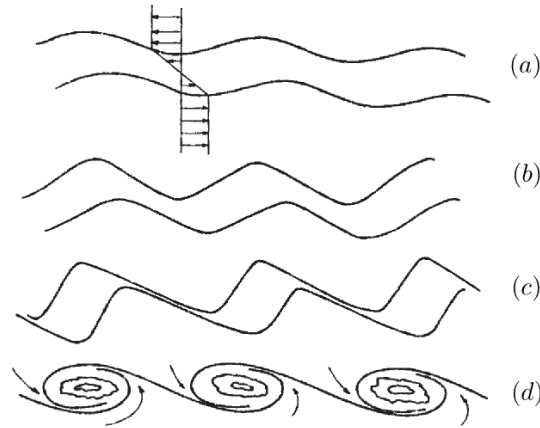
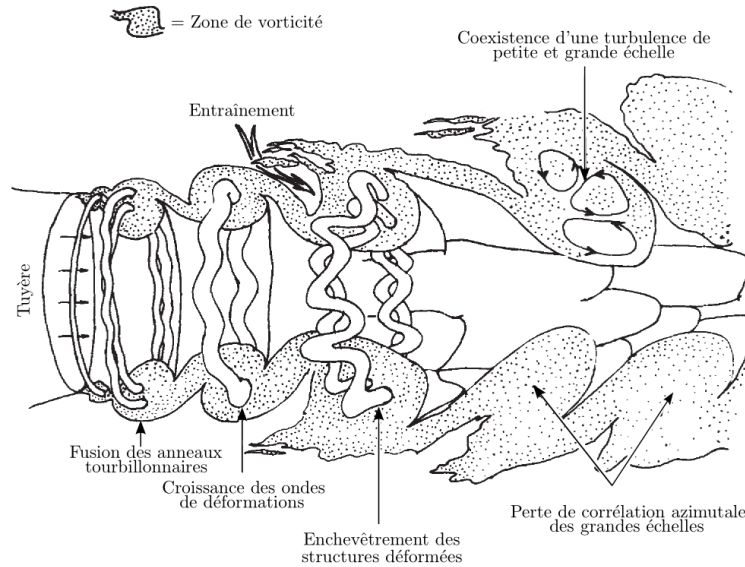


FIGURE 1.6 : Mécanisme du développement initial de l'instabilité de couche de mélange et de l'enroulement en tourbillons discrets, extrait de [Winant et Browand \(1974\)](#)

Dans le cas d'une configuration axisymétrique, plus représentative des écoulements de type jet, [Yule \(1978\)](#) a observé que l'instabilité naturelle de la couche de mélange initialement laminaire produit une série d'anneaux tourbillonnaires. Sous l'effet de leur induction mutuelle, deux anneaux consécutifs tendent à se rapprocher et s'enrouler l'un autour de l'autre jusqu'à finalement fusionner en un unique tourbillon par diffusion visqueuse. Ainsi, lors de la convection de ces structures, leur taille et leur distance de séparation tendent à augmenter. Comme illustré sur la Fig. 1.7, extraite des travaux de [Yule \(1978\)](#), au fur et à mesure de cet éloignement, des ondes de déformation viennent modifier la structure générale des anneaux tourbillonnaires et provoquer une perte de cohérence azimuthale. À partir d'une déformation critique, qui précède la phase turbulente, l'enchevêtrement des anneaux conduit à l'augmentation de l'étirement tourbillonnaire et à la production intense des petites échelles de la turbulence.

Outre la notion d'appariement, un phénomène bien plus brutal, responsable de la réduction du nombre de structures identifiables, a été discuté dans les observations de [Dimotakis et Brown \(1976\)](#). Occasionnellement, une structure cohérente de grande échelle peut se trouver piégée dans une zone d'étirement intense à proximité d'un ou plusieurs tourbillons. La destruction de la structure est alors quasi-immédiate. Agissant ensemble, l'appariement et la destruction des structures de grande échelle conduisent au caractère stochastique et chaotique des écoulements turbulents. Toutefois des traces de ces appariements restent souvent visibles dans la région turbulente, jusqu'à cinq diamètres en aval de la tuyère, montrant la coexistence des structures de grande et petite échelle et la persistance des premières dans la zone développée.

FIGURE 1.7 : Schéma de la structure d'un jet en transition, extrait de [Yule \(1978\)](#)

## 1.2 L'aéroacoustique des jets

### 1.2.1 Les composantes du bruit de jet

En parallèle des études aérodynamiques, des mesures acoustiques ont été effectuées afin d'identifier les mécanismes générateurs de bruit dans les écoulements de type jet.

  ce sujet, [Westley et Lilley \(1952\)](#) et [Powell \(1953\)](#) ont été parmi les premiers à réaliser des mesures acoustiques en champ proche et en champ lointain afin d'analyser le changement brutal du comportement acoustique des jets lors du passage en supersonique. En effet, le grondement sourd, sans fréquence dominante apparente, des jets subsoniques est généralement dominé par l'émergence d'un son strident une fois des vitesses d'éjection supersoniques atteintes. Cette fréquence discrète, communément appelée « bruit de raie », se retrouve de façon très marquée en amont du jet sur le spectre d'intensité acoustique de la Fig. 1.8 qui est extraite des mesures de [Norum et Seiner \(1982\)](#). Deux composantes large-bande sont également identifi bles, une à basse fréquence correspondant au « bruit de mélange turbulent », et une à haute fréquence liée à l'apparition de cellules de choc dans le sillage du jet pour des tuyères fonctionnant hors adaptation, le « bruit de choc ». Au point de fonctionnement, avec la disparition des cellules de choc, seule la composante large-bande issue de la couche de mélange turbulent est présente.

  noter que l'intensité relative de ces trois composantes est fortement dépendante de la direction d'observation. Le bruit de mélange turbulent rayonne majoritairement dans la direction aval tandis que le bruit de raie est plus intense en amont du jet. Le bruit de

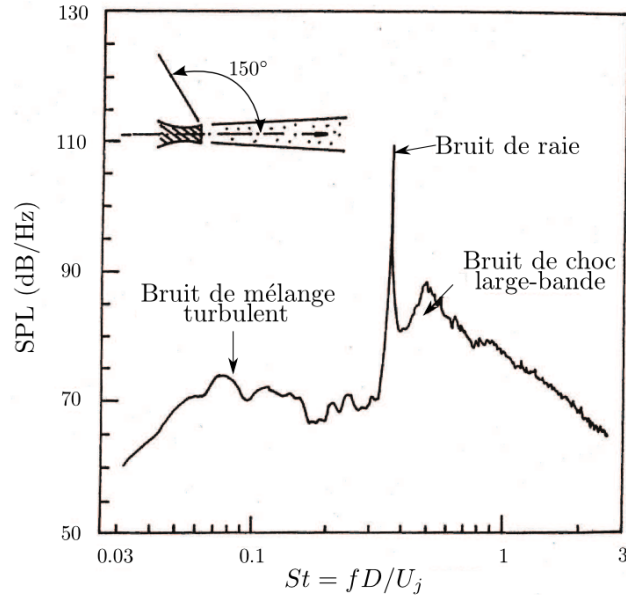


FIGURE 1.8 : Spectre d'intensité acoustique d'un jet froid supersonique non adapté à  $M_j = 1.67$  mesuré en amont de la tuyère à  $\vartheta = 150^\circ$  par [Norum et Seiner \(1982\)](#)

choc large bande quant à lui est caractérisé par une fréquence dominante qui évolue de façon monotone avec l'angle d'observation.

Une analyse plus détaillée de chacune des composantes du bruit des jets supersoniques est proposée dans la suite de cette section.

### 1.2.2 Le bruit de mélange turbulent

Afin d'isoler et d'analyser les caractéristiques acoustiques du bruit de mélange turbulent, [Yu et Dosanjh \(1972\)](#) ont réalisé des mesures acoustiques en champ proche et en champ lointain d'un jet froid supersonique adapté en pression. Leurs travaux soulignent la présence d'un lobe marqué vers l'aval du jet sur les contours des niveaux de pression (Fig. 1.9), qui est révélatrice du rayonnement très directif et très intense du bruit de mélange turbulent des jets supersoniques. Avec des mesures de directivité acoustique en champ lointain, représentées sur la Fig. 1.9 (b), [Tanna \(1977\)](#) a également confirmé que la partie dominante du bruit de mélange turbulent est confinée dans un secteur angulaire proche de l'axe du jet. Avec l'augmentation de l'angle d'observation, le niveau sonore augmente rapidement jusqu'à atteindre une valeur maximale pour un angle de directivité d'environ  $30^\circ$ . En dehors de ce secteur angulaire, le niveau sonore diminue progressivement jusqu'à se stabiliser sur la normale à l'axe du jet. Le bruit de mélange turbulent semble ainsi se répartir suivant deux composantes, une composante fortement directionnelle vers l'aval du jet et une composante moins intense, multi-directionnelle. [Tanna \(1977\)](#) a également étudié les effets de la température sur le rayonnement acoustique des

jets supersoniques. Il a démontré que pour une vitesse d'éjection fixée, toute augmentation de température a pour conséquence de diminuer le niveau de bruit. L'augmentation du niveau de bruit pour le jet chauffé de la Fig. 1.9 (b) est donc due à l'augmentation de la vitesse d'éjection faite pour maintenir constant le nombre de Mach.

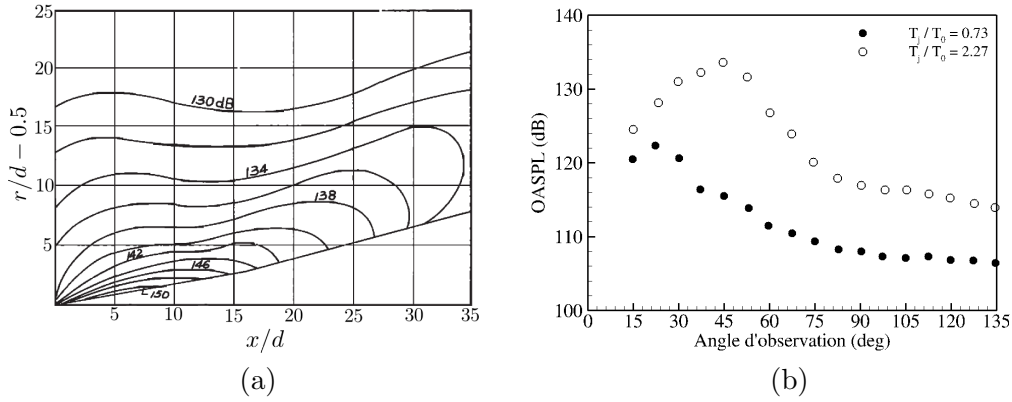


FIGURE 1.9 : Niveaux de pression en champ proche mesurés par Yu et Dosanjh (1972) (a) et directivité acoustique en champ lointain et effet de température extrait de Tanna (1977) (b) pour des jets supersoniques adaptés en pression à  $M_j = 1.5$  et  $M_j = 1.4$  respectivement

Après la découverte d'une certaine cohérence dans la turbulence des écoulements cisailés libres, de nombreux travaux se sont intéressés à la possibilité que ces structures à grande échelle jouent un rôle dominant dans le mécanisme de génération de bruit. Tam (1971) a notamment réalisé des visualisations par striescopia d'un jet supersonique, représentées sur la Fig. 1.10, qui mettent en évidence l'émission d'ondes planes au niveau de la couche de mélange, qui se propagent vers l'aval. Tam (1971) a alors proposé que ces ondes soient la conséquence directe de l'instabilité de la couche de mélange se développant en sortie de tuyère. En s'appuyant sur la théorie de la stabilité, il a alors proposé une modélisation des structures cohérentes par des ondes d'instabilité dans le but de prévoir les propriétés acoustiques des jets supersoniques. Malgré des hypothèses fortes, les résultats obtenus sont en accord avec les observations, laissant sous-entendre la responsabilité importante des structures turbulentes à grande échelle sur le rayonnement acoustique intense aux faibles angles.

Dans un premier temps pour des nombres de Reynolds faibles, McLaughlin *et al.* (1975) ont confirmé les observations précédentes grâce à des mesures anémométriques par fil chaud et des mesures acoustiques. Troutt et McLaughlin (1982) ont ensuite étendu la démarche à des nombres de Reynolds modérés en réalisant des mesures aéroacoustiques sur un jet supersonique avec  $M_j = 2.1$  et  $Re_d = 7.0 \times 10^4$  en chambre anéchoïque. Les mesures de propagation et d'amplification des perturbations ont alors permis de valider la modélisation proposée par Tam (1971), soit l'assimilation des structures cohérentes à des ondes d'instabilité ainsi que leur rôle dans les mécanismes de génération de bruit



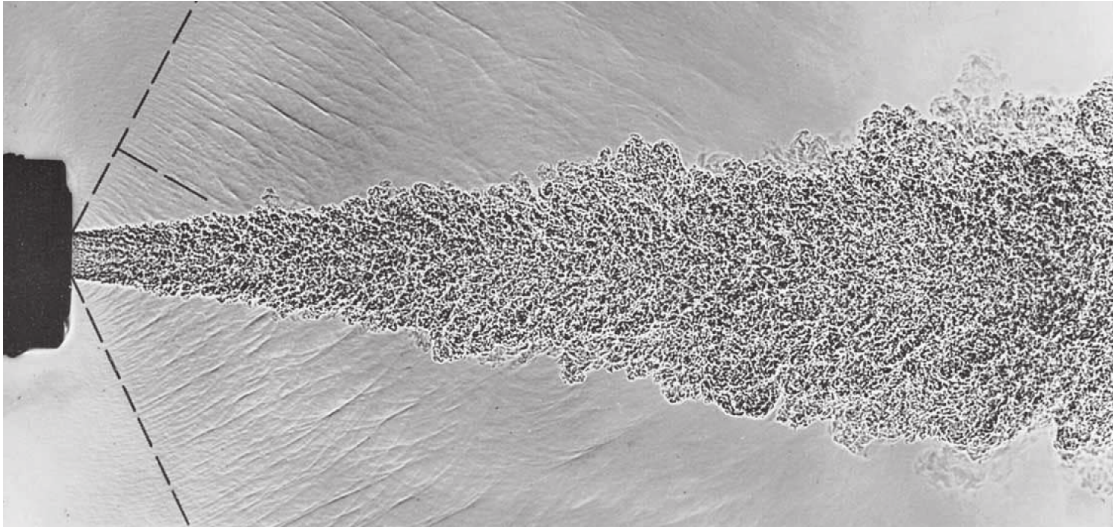


FIGURE 1.10 : Strioscopie d'un jet d'hélium supersonique issue des travaux de [Tam \(1971\)](#)

dans le cas des jets supersoniques. Classiquement, le rayonnement dit « par onde de Mach » qualifie ce mécanisme particulier obtenu lorsque la vitesse de phase des structures turbulentes de grande échelle est supersonique.

À noter que toutes les échelles de la turbulence sont génératrices de bruit. Toutefois, même si les notions de bruit des petites et grandes échelles restent controversées, elles permettent essentiellement de dissocier deux mécanismes acoustiques distincts : un bruit à basse fréquence très directif vers l'aval du jet, associé aux grandes échelles de la turbulence, et un rayonnement plus uniforme dans toutes les directions, couramment associé aux petites échelles de la turbulence. Si dans le cas des jets supersoniques il a été vu que le rayonnement par ondes de Mach domine l'écoulement, pour des jets subsoniques où les ondes d'instabilité se propagent essentiellement à des vitesses de phase subsoniques, le rôle des structures de grande échelle reste encore discuté.

### 1.2.3 Le bruit de choc large-bande

Des mesures en champ proche ont également été réalisées par [Yu et Dosanjh \(1972\)](#) dans le cas d'un jet supersonique sous-détendu. Les résultats obtenus, correspondant à la Fig. 1.11 (a), permettent cette fois-ci d'identifier deux lobes distincts. Le premier, similaire aux observations réalisées précédemment, forme un angle d'environ  $30^\circ$  avec l'axe du jet. Cette composante du bruit peut ainsi être associée de façon légitime au bruit de mélange turbulent. Le second lobe, quant à lui dirigé en amont du jet, est donc associé au bruit de choc large-bande.

La Fig. 1.11 (b), extraite des travaux de [Tanna \(1977\)](#), permet de comparer les niveaux de pression en champ lointain d'un jet froid supersonique sous-détendu vis-à-vis de son homologue adapté en pression. Le jet supersonique sous-détendu contient

à la fois la composante du bruit de mélange turbulent et celle du bruit de choc. Une bonne estimation de cette dernière peut donc être obtenue en réalisant une différence entre les diagrammes de directivité. Les résultats obtenus confirment les observations de [Yu et Dosanjh \(1972\)](#) sur la contribution prépondérante du bruit de choc dans un secteur angulaire légèrement en amont de la tuyère avec une augmentation de 12 dB pour  $\vartheta = 135^\circ$  dans le cas du jet sous-détendu. [Tanna \(1977\)](#) souligne toutefois une réduction de cette contribution avec l'augmentation de la température.

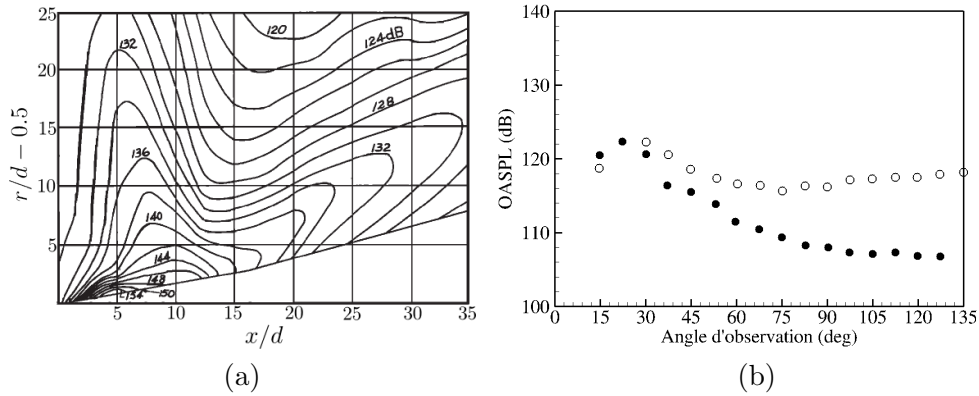


FIGURE 1.11 : Niveaux de pression en champ proche d'un jet sous-détendu à  $M_j = 1.5$  réalisés par [Yu et Dosanjh \(1972\)](#) (a) et comparaison des directivités acoustiques en champ lointain d'un jet adapté en pression à  $M_j = 1.4$  (●) et de son homologue sous-détendu (○) extrait de [Tanna \(1977\)](#) (b)

D'une manière différente, il est possible de mettre en évidence que l'influence du bruit de choc est restreinte à un secteur angulaire particulier en comparant les niveaux de pression d'un jet adapté et d'un jet sous-détendu en faisant varier le nombre de Mach à l'éjection. Cette démarche a été adoptée dans l'article de [Tanna \(1977\)](#) dont est issue la Fig. 1.12. Dans la direction aval de l'écoulement  $\vartheta = 30^\circ$ , voir Fig. 1.12 (a), le bruit généré par le jet adapté et le jet sous-détendu sont similaires. La contribution du bruit de choc, bien que relativement faible, reste néanmoins présente en aval. Au contraire, pour des angles d'observation plus importants  $\vartheta = 90^\circ$ , comme illustré sur la Fig. 1.12 (b), le bruit de choc est une fois de plus significatif avec une augmentation de 8 dB.

D'un point de vue physique, [Harper-Bourne et Fisher \(1974\)](#) ont été les premiers à fournir une compréhension du mécanisme de génération du bruit de choc. Lorsque la tuyère n'opère pas à son point de fonctionnement, l'écart de pression statique entre le jet et le milieu ambiant provoque l'apparition de cellules de choc dans le sillage du jet, comme visualisé sur la Fig. 1.13, issue des travaux de [André et al. \(2010\)](#). Les structures de grande échelle de la couche de mélange vont interagir avec ces cellules, les déformer et occasionner une instabilité des ondes de choc. Les perturbations ainsi créées vont se propager en amont et en aval du jet avec, pour certaines composantes, des vitesses de phase supersoniques vis-à-vis du milieu ambiant. Un rayonnement acoustique très

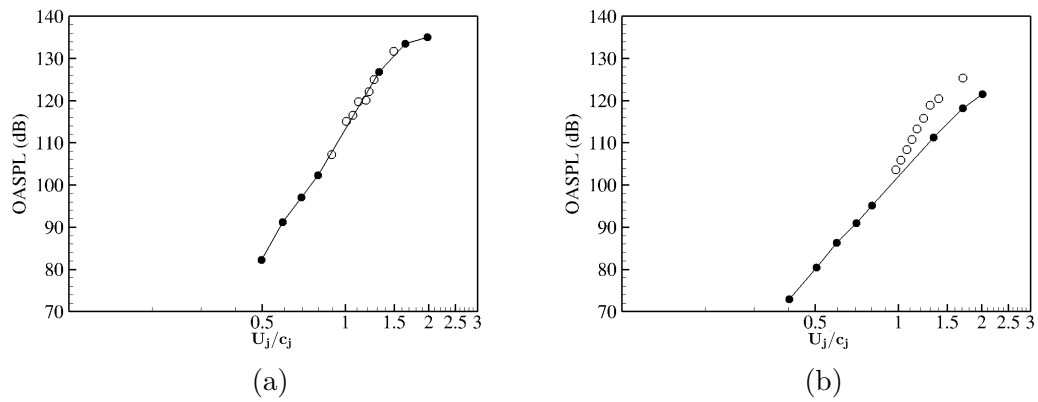


FIGURE 1.12 : Comparaison des niveaux de pression d'un jet adapté en pression (●) et d'un jet hors adaptation (○) en fonction de la vitesse d'éjection pour des angles d'observation de  $\vartheta = 30^\circ$  (a) et  $\vartheta = 90^\circ$  (b) extrait de [Tanna \(1977\)](#)

directif est alors engendré, de par le caractère quasi-périodique des structures de grande échelle et l'espacement régulier des cellules de choc.

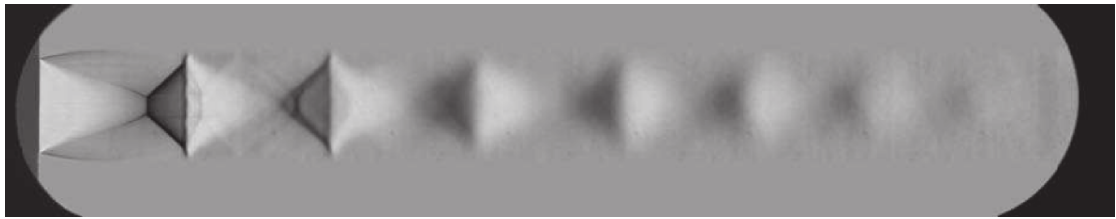


FIGURE 1.13 : Strioscopie moyennée sur 8 images d'un jet sous-détendu et mise en évidence des cellules de choc, figure issue des travaux de [André et al. \(2010\)](#)

Une caractéristique importante du bruit de choc est une diminution de la fréquence dominante avec l'augmentation de l'angle d'observation. La Fig. 1.14 correspond aux spectres acoustiques du bruit de choc d'un jet froid supersonique non adapté à  $M_j = 1.67$ , mesurés par [Norum et Seiner \(1982\)](#). Sept spectres sont ainsi représentés par intervalles de  $15^\circ$ . Chaque spectre semble être dominé par une fréquence unique, la fréquence fondamentale, localisée à l'aide d'une flèche sur le graphique. La diminution de la fréquence fondamentale lorsque l'angle d'observation augmente est remarquable. En effet, à  $\vartheta = 60^\circ$  la fréquence dominante se situe autour de 11 kHz contre 3.5 kHz pour  $\vartheta = 150^\circ$ . Une autre évolution caractéristique du bruit de choc large-bande est celle de la largeur à mi-hauteur du maximum de fréquence. En amont, le spectre est caractérisé par un pic relativement étroit qui tend à s'élargir au fur et à mesure que l'on s'approche de l'axe du jet. Les niveaux de bruit maximum pour chaque angle sont également référencés sur la Fig. 1.14. De façon similaire aux résultats de [Tanna \(1977\)](#), la décroissance rapide du niveau de bruit occasionné par le bruit de choc aux faibles angles est évidente avec une réduction de 7 dB entre  $\vartheta = 150^\circ$  et  $\vartheta = 60^\circ$ .



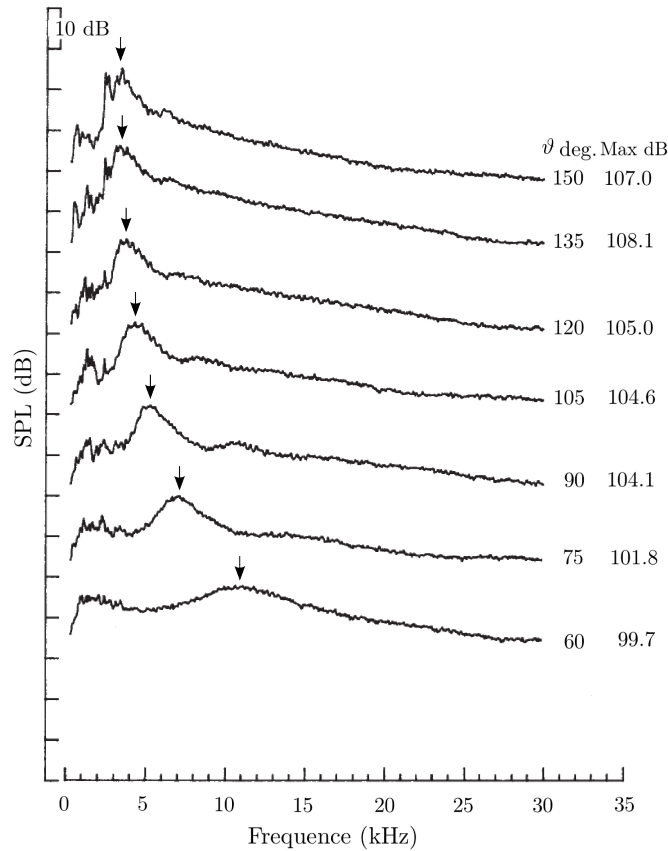


FIGURE 1.14 : Spectre d'intensité acoustique du bruit de choc large-bande d'un jet froid supersonique non-adapté à  $M_j = 1.67$  pour différents angles d'observation, réalisé par [Norum et Seiner \(1982\)](#)

#### 1.2.4 Le bruit de raie

Comme mentionné précédemment, le spectre d'intensité acoustique est dominé dans certains cas par l'émergence d'une fréquence pure, le bruit de raie. [Powell \(1953\)](#) est le premier à décrire le mécanisme lié à cette composante qui est issue d'un couplage entre la couche de mélange, les cellules de choc et le champ acoustique. La couche de mélange, relativement fine en sortie de tuyère, est très réceptive aux perturbations extérieures. Or, les ondes acoustiques produites par l'interaction choc-turbulence, en se propageant vers l'amont, peuvent en partie être diffractées par la lèvre de la tuyère et interagir avec la couche de mélange. Un mécanisme de rétroaction peut ainsi se mettre en place avec l'amplification et l'interaction de ces nouvelles instabilités avec les cellules de choc. Le rayonnement intense vers l'amont engendré par cette dynamique est visible sur la strioscopie de la Fig. 1.15 réalisée par [Raman \(1997\)](#) où deux fronts d'onde semi-circulaires sont présents de part et d'autre du jet. Le forçage de la couche de mélange à la fréquence fondamentale du bruit de raie est ici si intense qu'une oscillation du jet lui-même est observée.

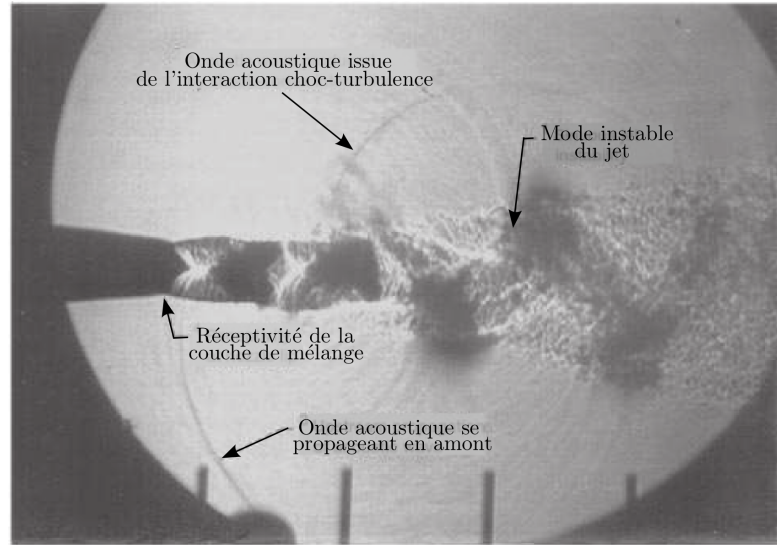


FIGURE 1.15 : Mise en évidence de la boucle de rétroaction à l'origine du bruit de raie par strioscopie d'un jet supersonique rectangulaire à  $M_j = 1.5$  d'après [Raman \(1997\)](#)

Bien que le bruit de raie soit associé à la présence d'un fondamental et de plusieurs harmoniques, les expériences de [Powell \(1953\)](#) se sont concentrées dans un premier temps sur l'évolution du fondamental en fonction des conditions d'éjection. Si pour une tuyère bidimensionnelle, la fréquence du bruit de raie diminue de façon continue avec l'augmentation du nombre de Mach, des discontinuités apparaissent dans le cas des tuyères axisymétriques. Ces variations brutales de fréquence, classées en fonction de la répartition azimutale de leur rayonnement, sont référencées comme un changement de mode du bruit de raie. La réalisation de mesures optiques, notamment par [Sherman \*et al.\* \(1976\)](#), a révélé que les différentes fréquences du bruit de raie correspondent à différents modes d'oscillation du jet. Pour un nombre de Mach relativement faible, le rayonnement acoustique du bruit de raie dans la direction amont est principalement axisymétrique. L'augmentation du nombre de Mach provoque des sauts en fréquence correspondant à différents modes de battement du jet.

Par des mesures acoustiques, [Sherman \*et al.\* \(1976\)](#) ont également montré que les domaines d'évolution des différents modes n'étaient pas totalement disjoints, plusieurs modes pouvant coexister et provoquer des oscillations aléatoires brutales du jet. Toutefois, [Norum \(1983\)](#) a montré qu'il était possible de stabiliser le jet sur un mode précis par l'ajout d'une surface réfléchissante à proximité de la lèvre de la tuyère. Les diagrammes de directivité acoustique des différentes harmoniques du bruit de raie, extraits des travaux de [Norum \(1983\)](#), sont reportés sur la Fig. 1.16. Alors que la fréquence fondamentale (Fig. 1.16 (a)) se propage principalement dans la direction amont de l'écoulement, la première harmonique (Fig. 1.16 (b)), d'une amplitude bien plus faible, semble dominer l'ensemble du spectre acoustique et rayonner fortement sur la normale au jet. Bien qu'un pic de directivité reste visible dans une direction comparable à celle du fondamental, la

présence d'une nouvelle direction privilégiée laisse sous-entendre une dynamique non linéaire de création des harmoniques.

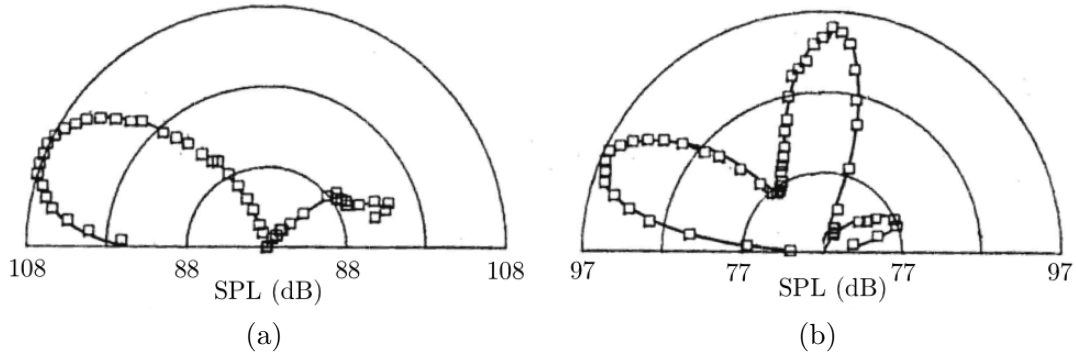


FIGURE 1.16 : Diagrammes de directivité en champ lointain du fondamental (a) et de la première harmonique (b) du bruit de raie d'un jet froid supersonique à  $M_j = 1.49$ , réalisés par [Norum \(1983\)](#)

Le bruit de raie reste néanmoins fortement dépendant des conditions amont. Lors du déplacement de la surface réfléchissante jusqu'à six diamètres en amont, pas moins de treize sauts en fréquence ont été observés par [Norum \(1983\)](#). Le nombre de cellules de choc identifiables a évolué par la même occasion de cinq à onze en fonction du mode d'oscillation du jet. En positionnant précisément la surface au quart de la longueur d'onde du fondamental, [Nagel et al. \(1983\)](#) ont montré qu'il était possible de supprimer la composante tonale sans altérer la dynamique du jet. Une subtile variation des conditions amont a donc une influence considérable sur le développement des cellules de choc et sur le rayonnement du bruit de raie.

## 1.3 Modélisation et prévision du bruit de jet

### 1.3.1 Analogies acoustiques

Par une reformulation des équations exactes de la dynamique des fluides en une équation d'onde inhomogène, [Lighthill \(1952, 1954\)](#) a été le premier à proposer une modélisation du bruit d'origine aérodynamique. L'équation de Lighthill est obtenue à partir des équations de Navier-Stokes :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i) = 0 \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_i u_j + p \delta_{ij} - \tau_{ij}) = 0 \quad (1.2)$$

où  $\rho$  est la masse volumique,  $u_i$  la composante de la vitesse dans la direction  $x_i$ ,  $p$  la pression et  $\tau_{ij}$  le tenseur des contraintes visqueuses. Par une manipulation des équations

(1.1) et (1.2), il est possible d'éliminer le terme  $\rho u_i$ , soit :

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (\rho u_i u_j + p \delta_{ij} - \tau_{ij}) \quad (1.3)$$

En soustrayant de part et d'autre de l'équation (1.3) le terme  $c_0^2 \partial^2 \rho / \partial x_i \partial x_i$ , où  $c_0$  est la célérité du son, Lighthill réalise une séparation formelle du problème entre un opérateur de propagation acoustique et un terme source où sont concentrés les phénomènes aérodynamiques :

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} \quad (1.4)$$

avec  $T_{ij}$  le tenseur de Lighthill, donné par :

$$T_{ij} = \rho u_i u_j + (p - \rho c_0^2) \delta_{ij} - \tau_{ij} \quad (1.5)$$

Une analogie est ainsi établie entre les fluctuations acoustiques de masse volumique dans un fluide et celles produites par une distribution de sources  $\partial^2 T_{ij} / \partial x_i \partial x_j$  dans un milieu homogène au repos. Une telle approche est qualifiée d'analogie acoustique de par le fait que l'origine physique du bruit se trouve remplacée par une distribution de sources équivalentes.

La résolution de l'équation d'onde précédente est obtenue par l'utilisation de la fonction de Green en champ libre,  $G_0$ , définie comme la solution de l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial^2 G_0(\mathbf{x}, t | \mathbf{y}, \tau)}{\partial x_i^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 G_0(\mathbf{x}, t | \mathbf{y}, \tau)}{\partial t^2} = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \delta(t - \tau) \quad (1.6)$$

avec pour conditions aux limites à l'infini un rayonnement nul. D'un point de vue physique, elle représente le signal perçu par un observateur en un point  $\mathbf{x}$  à l'instant  $t$  suite à une impulsion émise par une source en  $\mathbf{y}$  à un instant  $\tau$ . La solution de l'équation (1.4) est obtenue en réalisant le produit de convolution de la fonction de Green en champ libre et du terme source, soit après simplification :

$$\rho(\mathbf{x}, t) - \rho_0 = \rho'(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi c_0^2} \int_V \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial y_i \partial y_j} \left( \mathbf{y}, t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}{c_0} \right) \frac{d\mathbf{y}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \quad (1.7)$$

avec  $\rho_0$  la masse volumique du fluide au repos. En supposant l'observateur positionné en champ lointain, soit  $x = |\mathbf{x}| \gg |\mathbf{y}|$ , les approximations suivantes peuvent être faites :

$$|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \simeq x \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial x_i} \simeq \frac{x_i}{x} \frac{1}{c_0} \frac{\partial}{\partial t} \quad (1.8)$$

L'équation (1.7) devient :

$$\rho'(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi c_0^4} \frac{x_i x_j}{x^3} \int_V \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial t^2} \left( \mathbf{y}, t - \frac{x}{c_0} \right) d\mathbf{y} \quad (1.9)$$

Une modélisation du terme source est nécessaire afin d'obtenir une représentation approchée du rayonnement acoustique. Dans le cas des jets froids subsoniques, ou de façon plus générale pour des applications à faible nombre de Mach, à nombre de Reynolds élevé et sans effets thermiques, le tenseur de Lighthill peut être simplifié par :

$$T_{ij} \simeq \rho_0 u_i u_j \quad (1.10)$$

En prenant la vitesse d'éjection du jet  $U_j$  comme échelle de référence pour les vitesses et le diamètre de la tuyère  $d$  comme longueur de référence, l'analyse dimensionnelle proposée par Lighthill (1952) fournit :

$$\rho'(\mathbf{x}, t) \sim \rho_0 \left( \frac{U_j}{c_0} \right)^4 \frac{d}{x} \quad (1.11)$$

L'intensité acoustique en champ lointain, définie comme le flux d'énergie acoustique par unité de surface, est donnée par :

$$I(\mathbf{x}) = \frac{c_0^3}{\rho_0} \langle \rho'(\mathbf{x}, t) \rangle^2 \sim \rho_0 U_j^3 M_\infty^5 \left( \frac{d}{x} \right)^2 \quad (1.12)$$

avec  $\langle \rangle$  la moyenne temporelle. La célèbre loi d'évolution en  $U_j^8$  de la puissance acoustique est finalement obtenue par l'intégration de l'intensité acoustique sur une sphère de rayon  $x$ . À noter que dans le cas des jets supersoniques, Ffowcs Williams (1963) a montré que la prise en compte des effets de convection des sources quadripolaires, l'effet Doppler, altère la loi d'évolution en  $U_j^8$  de la puissance acoustique en une dépendance en  $U_j^3$ .

Plusieurs autres analogies acoustiques ont par la suite été développées afin d'améliorer la modélisation proposée par Lighthill. Lilley (1974) a ainsi développé une analogie acoustique modifiée afin de prendre en compte les effets de réfraction des ondes acoustiques par la couche de mélange. Le gradient de vitesse induit par la zone cisailée vient en effet dévier les ondes acoustiques vers l'extérieur du jet. Cet effet se retrouve amplifié dans le cas des jets chauds de par la décroissance de la célérité du son dans la direction radiale. Goldstein (2003) a ensuite généralisé ces résultats à l'ensemble des écoulements cisailés.

Si en théorie les analogies acoustiques sont capables de prévoir le rayonnement acoustique émis par un écoulement turbulent, elles nécessitent néanmoins une connaissance préalable du champ hydrodynamique afin de fournir une évaluation précise du terme source. De nombreux modèles ont ainsi été proposés en s'appuyant soit sur des mesures de corrélations spatiales de vitesses en deux points par Davies *et al.* (1963), soit sur des hypothèses, comme celle d'une turbulence isotrope, par Ribner (1969) et Lilley (1994) ou plus récemment sur des simulations aux grandes échelles par Karabasov *et al.* (2010).

La grande diversité des méthodes employées souligne la limite des analogies acoustiques qui restent souvent spécifiques à un cas d'étude donné.

### 1.3.2 Spectre de similitude

Deux mécanismes acoustiques distincts ont été mis en avant dans le cas du bruit de mélange turbulent. Alors que la première composante est associée aux structures de grande échelle, la seconde est généralement liée au comportement plus aléatoire des petites échelles de la turbulence. Toutes deux sont génératrices de bruit sur une large gamme fréquentielle, bien que le rayonnement des structures de grande échelle soit plus intense à basse fréquence avec une directivité marquée vers l'aval du jet. En supposant que ces deux mécanismes soient seuls responsables du bruit des jets supersoniques adaptés, [Tam et al. \(1996\)](#) ont proposé deux spectres de similitudes dont les caractéristiques sont propres à chacune des composantes en champ lointain. Le spectre complet  $S$  du jet d'étude est défini comme une composition de ces deux spectres :

$$S_{Tam} = \left[ A F_{Tam} \left( \frac{f}{f_L} \right) + B G_{Tam} \left( \frac{f}{f_F} \right) \right] \left( \frac{d}{r} \right)^2 \quad (1.13)$$

avec  $F_{Tam} \left( \frac{f}{f_L} \right)$  et  $G_{Tam} \left( \frac{f}{f_F} \right)$  les spectres de similitude des grandes et petites échelles. En l'absence d'une échelle de temps de référence, la fréquence  $f$  est normalisée soit par  $f_L$ , la fréquence maximale du spectre associée aux structures turbulentes à grande échelle, ou par  $f_F$ , la fréquence maximale du spectre associée aux petites échelles de la turbulence. Les termes  $A$  et  $B$  sont quant à eux les amplitudes relatives des deux composantes.

Afin de fournir des preuves concrètes de cette séparation du bruit de mélange en deux composantes distinctes, [Tam et al. \(1996\)](#) ont entamé une analyse détaillée de l'ensemble des mesures réalisées à l'époque sur les jets supersoniques par le *Jet Noise Laboratory* du *NASA Langley Research Center*. A l'aide de cette importante base de données de plus de 1900 références, les fonctions du spectre de similitude  $F_{Tam} \left( \frac{f}{f_L} \right)$  et  $G_{Tam} \left( \frac{f}{f_F} \right)$  ont été identifiées et validées sur une large gamme de nombres de Mach allant de 1.37 à 2.24, aussi bien dans le cas de jets froids que fortement chauffés. Les deux spectres ont des formes bien distinctes, comme représenté sur la Fig. 1.17. Celui associé aux structures de grande échelle présente un pic marqué tandis que le spectre du bruit des petites échelles est plus étalé en fréquence.

Dans leur étude, [Tam et al. \(1996\)](#) ont découvert par la même occasion que le nombre de Mach avait peu d'influence sur le bruit de mélange turbulent. Ainsi, cette séparation en deux composantes doit pouvoir se vérifier indépendamment du nombre de Mach, qu'il soit supersonique ou au contraire subsonique. [Tam et al. \(1996\)](#) ont alors comparé leur modélisation par spectres de similitude avec les mesures réalisées par [Ahuja \(1973\)](#) sur

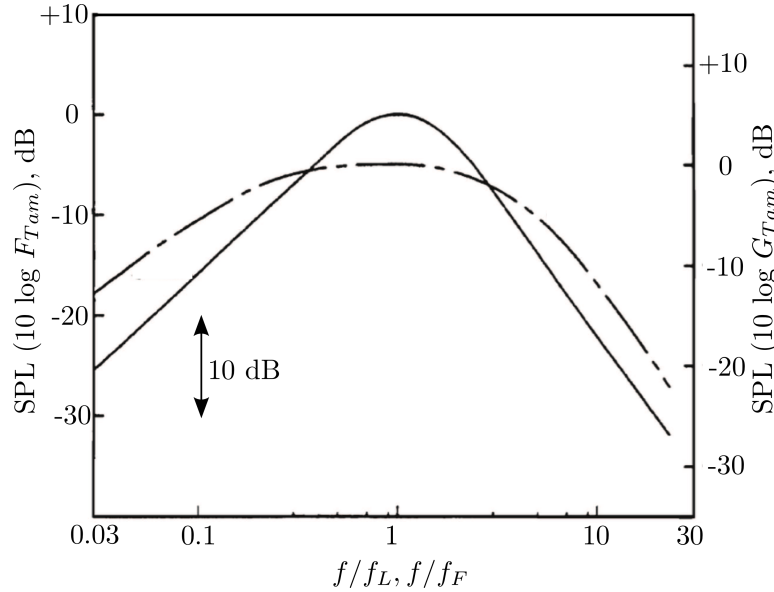


FIGURE 1.17 : Spectres de similitude des deux composantes du bruit de mélange.  
 ( — ) : spectre associé aux structures de grande échelle et ( - - - ) : spectre associé aux petites échelles de la turbulence d'après [Tam et al. \(1996\)](#)

un jet froid subsonique pour  $M_j = 0.98$ . Comme observé sur la Fig. 1.18, l'écart se révèle extrêmement faible, aussi bien à proximité de l'axe du jet que sur la normale, ce qui laisse supposer une continuité des mécanismes acoustiques des jets supersoniques aux jets subsoniques. D'après [Viswanathan \(2004\)](#), l'effet de la température semble être également

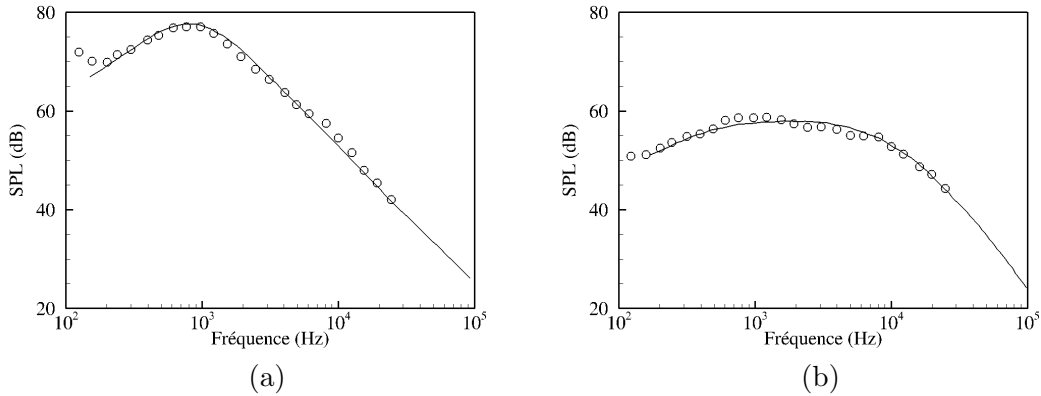


FIGURE 1.18 : Comparaison des spectres de similitude de [Tam et al. \(1996\)](#) ( — ) et des mesures réalisées par [Ahuja \(1973\)](#) ( o ) sur un jet froid subsonique pour  $M_j = 0.98$   
 pour les structures à grande échelle à  $\vartheta = 20^\circ$  (a)  
 et les petites structures à  $\vartheta = 90^\circ$  (b)

correctement reproduit par cette méthode, même si des écarts ont été remarqués aux faibles angles d'observation. Une distinction des mécanismes acoustiques des petites et grandes échelles semble donc être pertinente. Toutefois, d'autres phénomènes physiques peuvent expliquer une telle modification du spectre en fonction de l'angle d'observation. [Morfey et al. \(1978\)](#) ont notamment montré qu'une approximation hautes fréquences de

l'équation de Lilley, avec la prise en compte des effets de convection, de l'effet Doppler et des effets de réfraction, permet également de reproduire fidèlement le rayonnement acoustique d'une large gamme de jet.

Une limite de cette méthode par spectre de similitude, malgré sa capacité à reproduire de façon remarquable les résultats obtenus expérimentalement, reste la difficulté à extraire une compréhension physique des mécanismes acoustiques en jeu dans la génération du bruit de mélange turbulent.

### 1.3.3 Simulation numérique du bruit de jet

Si la majorité des premières études sur les écoulements de type jet étaient d'ordre analytique ou expérimental, le développement des méthodes numériques et des moyens informatiques a permis l'émergence d'une discipline à part entière, l'aéroacoustique numérique. Ce domaine d'étude a pour objectifs de prévoir le rayonnement acoustique émis par un écoulement et d'apporter une compréhension fine des mécanismes physiques en jeu. Toutefois, la disparité des échelles de longueurs entre les phénomènes aérodynamiques et acoustiques dans l'étude des jets se révèle être une contrainte forte. En effet, dans la région où se situent les sources sonores, l'évolution des structures turbulentes est régie par l'épaisseur de la couche de mélange. L'échelle naturelle du champ acoustique, généralement bien plus importante, correspond quant à elle à la plus petite longueur d'onde en mesure de transporter de l'énergie. Avec un facteur de l'ordre de  $10^3$  entre les plus basses et les plus hautes fréquences, les disparités temporelles sont elles aussi significatives. Afin de réaliser une description précise du spectre acoustique, le rayonnement large bande de la turbulence impose donc des temps de calcul conséquents.

Différentes méthodes de calcul existent. La première, appelée Simulation Numérique Directe (DNS), consiste à résoudre directement les équations de la mécanique des fluides instationnaires compressibles pour l'ensemble des échelles de la turbulence. Un maillage très fin est alors nécessaire afin de prendre en compte la plus petite échelle de la turbulence, l'échelle de Kolmogorov  $\eta$ , nécessaire à la dissipation d'énergie. Dans le cas d'une turbulence homogène et isotrope, cette disparité d'échelle est reliée au nombre de Reynolds par :

$$\frac{l}{\eta} \sim Re^{3/4} \quad (1.14)$$

où  $l$  est l'échelle caractéristique des structures à grande échelle. Le nombre de Reynolds est donc un indicateur de la richesse du spectre turbulent de l'écoulement. Malheureusement, dans la plupart des applications actuelles où le nombre de Reynolds est relativement élevé, le domaine de calcul devient trop important vis-à-vis des performances informatiques actuelles. Toutefois, en se limitant à un nombre de Reynolds de 2000, [Freund et al. \(1998, 2000\)](#) ont présenté pour la première fois l'utilisation d'une telle méthode pour déterminer le champ acoustique proche d'un jet supersonique à  $M_j = 1.92$  adapté



en pression et légèrement chauffé avec  $T_j/T_0 = 1.12$ . Le rayonnement par ondes de Mach obtenu numériquement est en parfait accord avec les mesures.

Afin d'étendre ces simulations numériques à des nombres de Reynolds plus élevés, une méthode alternative consiste à réaliser un filtrage spatial et à résoudre les équations stationnaires uniquement pour les grandes structures de la turbulence. Le rôle dissipatif des petites échelles est alors modélisé, ou non, par un modèle dit de « sous-maille », il s'agit de la Simulation des Grandes Échelles (LES). Si la méthode nécessite une discrétisation moins raffinée que celle d'une DNS, elle reste néanmoins coûteuse. Dans le cas de l'étude du rayonnement acoustique des jets, où les petites échelles de la turbulence ont une influence non négligeable, la question du choix de la fréquence de coupure est très importante. En effet, [Witkowska et al. \(1997\)](#) ont montré que la contribution acoustique des petites structures turbulentes, non résolues par le modèle de sous-maille, n'était pas prise en compte. L'utilisation d'une telle méthode reste néanmoins justifiable pour l'étude du rôle des structures de grande échelle dans les mécanismes de génération de bruit.

Une revue de l'état de l'art de la prévision du bruit de jet a été effectuée par [Bodony et Lele \(2006\)](#) selon lesquels [Bogey et al. \(2003\)](#) semblent être les premiers à avoir calculé avec succès le rayonnement acoustique en champ proche et lointain d'un jet circulaire subsonique à  $M_j = 0.9$  et  $Re_d = 6.5 \times 10^4$  par l'intermédiaire d'une simulation des grandes échelles. En plus de valider la faisabilité d'une telle méthode, une forte corrélation a été observée entre la destruction intermittente de la couche de mélange en fin de cône potentiel et le bruit rayonné en aval de l'écoulement.

Une alternative à la résolution directe du rayonnement acoustique consiste à réaliser un calcul en deux étapes afin d'évaluer, de la façon la plus appropriée qui soit, le champ aérodynamique d'une part et le champ acoustique de l'autre. Les fluctuations en champ proche, déterminées préalablement à partir des équations de Navier-Stokes, sont utilisées pour la définition des termes sources d'un opérateur de propagation acoustique. Si les informations relatives aux interactions entre les champs aérodynamiques et acoustiques, comme l'effet de réfraction, sont souvent manquantes, ces méthodes permettent une estimation plus rapide du champ sonore. [Gamet et Estivalezes \(1998\)](#) ont ainsi utilisé les fluctuations acoustiques en champ proche d'un jet supersonique obtenues par LES afin de définir un terme source cohérent pour leur algorithme de propagation acoustique, en l'occurrence une méthode de Kirchhoff. [Constantinescu et Lele \(2001\)](#) ont par la suite appliqué cette démarche au cas d'un jet subsonique à  $M_j = 0.9$  pour deux nombres de Reynolds,  $Re_d = 3.6 \times 10^3$  et  $Re_d = 7.2 \times 10^4$ , afin de confronter leurs résultats à de précédentes expériences. La fréquence privilégiée du jet pour un nombre de Strouhal  $St = 0.30$ , la localisation des sources acoustiques en fin de cône potentiel et la propagation des perturbations acoustiques en champ lointain étaient en accord avec les mesures, appuyant la validité d'un tel couplage.

## 1.4 Analyse de la stabilité des jets

### 1.4.1 Stabilité locale

Si les structures à grande échelle semblent jouer un rôle important sur le rayonnement acoustique des jets, l'évolution quasi-déterministe de ces ondes d'instabilité a rapidement suggéré l'utilisation des méthodes d'analyse de stabilité afin de les modéliser.

La démarche consiste à étudier la stabilité d'un écoulement de base stationnaire  $\bar{\mathbf{q}}(\mathbf{x})$ , solution des équations de Navier-Stokes. En pratique, la détermination de cet écoulement dit également porteur reste parfois délicate. À ce titre, une discussion sera proposée dans la suite de ce manuscrit. Physiquement, un tel écoulement stationnaire est toujours perturbé par de petites fluctuations  $\mathbf{q}'(\mathbf{x}, t)$  pouvant venir de la turbulence extérieure ou d'une rugosité en paroi de la tuyère. Toutefois, le but de l'analyse de stabilité n'est pas d'appréhender les mécanismes à l'origine de ces perturbations, mais plutôt de caractériser leurs évolutions. Si une perturbation est amortie, l'écoulement est dit stable. Au contraire, si la perturbation est amplifiée par l'écoulement, ce dernier est qualifié d'instable.

Différentes classifications des mécanismes d'instabilités existent. [Huerre et Monkewitz \(1985\)](#) proposent une distinction entre les instabilités dites convectives et les instabilités dites absolues en observant la réponse d'un système soumis à une impulsion en  $x = 0$  et  $t = 0$ . Comme illustré sur la Fig. 1.19 (a), l'instabilité convective est caractérisée par une convection par l'écoulement des ondes d'instabilité. Tous les points du système étudié retrouvent un état d'équilibre après un certain temps. Au contraire dans certains cas, Fig. 1.19 (b), la perturbation initiale envahit la totalité de l'écoulement, l'instabilité est alors absolue. D'autres classifications existent mais elles ne seront pas exposées dans le présent manuscrit.

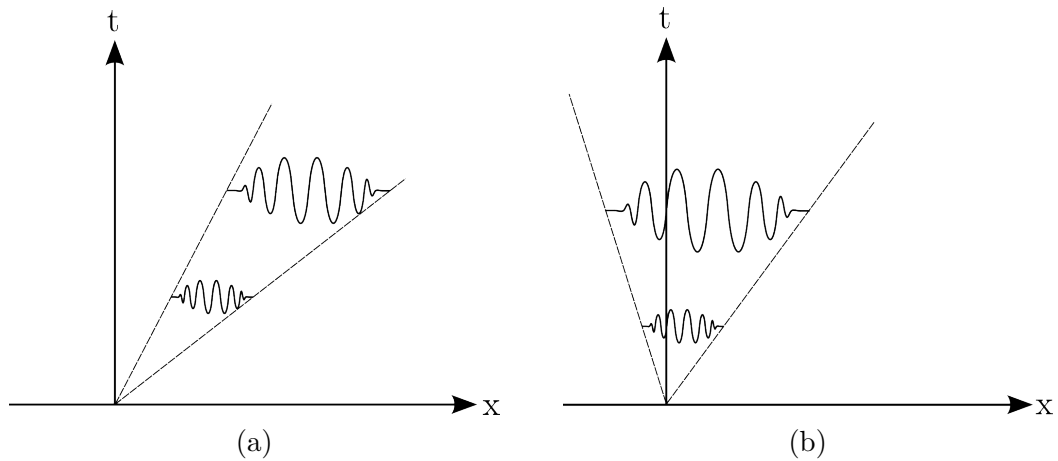


FIGURE 1.19 : Illustration des réponses impulsionnelles d'une instabilité convective (a) et d'une instabilité absolue (b) extraite de [Huerre et Monkewitz \(1985\)](#).

En suivant la technique dite des petites perturbations, l'écoulement instantané  $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$ , lui-même solution des équations de Navier-Stokes, est défini comme la superposition d'un écoulement de base stationnaire  $\bar{\mathbf{q}}(\mathbf{x})$  et d'une fluctuation  $\mathbf{q}'(\mathbf{x}, t)$  :

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) = \bar{\mathbf{q}}(\mathbf{x}) + \mathbf{q}'(\mathbf{x}, t) \quad (1.15)$$

Dans le système de coordonnées cylindriques  $(x, r, \theta, t)$ , plus adapté à l'étude des jets, les hypothèses d'axisymétrie et de stationnarité de l'écoulement de base permettent de supprimer les dépendances de ce dernier en azimuth  $\theta$  et en temps  $t$ . En supposant l'écoulement de base localement parallèle, cadre de la théorie de stabilité locale, ce dernier devient fonction uniquement de la coordonnée radiale  $r$ .

$$\bar{\mathbf{q}} = \bar{\mathbf{q}}(r) \quad (1.16)$$

Par une approche modale, la perturbation  $\mathbf{q}'(x, r, \theta, t)$  est recherchée sous la forme de modes normaux, où la dépendance vis-à-vis des variables spatiales  $x, \theta$  et temporelle  $t$  est sous forme exponentielle :

$$\mathbf{q}'(x, r, \theta, t) = \hat{\mathbf{q}}(r)e^{i(\alpha x + m\theta - \omega t)} \quad (1.17)$$

avec  $\hat{\mathbf{q}}(r)$  la fonction d'amplitude donnant l'évolution de la perturbation dans le jet,  $\alpha$  le nombre d'onde axial,  $m$  le nombre d'onde azimuthal et  $\omega$  la pulsation temporelle. En introduisant cette formulation dans les équations de Navier-Stokes linéarisées, un système d'équations différentielles ordinaires assimilable à un problème aux valeurs propres est obtenu. Une solution, autre que la solution identiquement nulle, est alors déterminée si et seulement si  $\alpha, m$  et  $\omega$  vérifient une relation complexe dite de dispersion :

$$\mathcal{F}(\alpha, m, \omega) = 0 \quad (1.18)$$

Afin de satisfaire la dépendance spatio-temporelle de la perturbation imposée par la relation précédente, les deux équations correspondant aux parties réelle et imaginaire de cette dernière doivent être vérifiées, soit  $\text{Re}(\mathcal{F}) = 0$  et  $\text{Im}(\mathcal{F}) = 0$ . Or, pour un nombre d'onde azimuthal fixé, le problème ainsi posé fait intervenir quatre inconnues que sont les parties réelles et imaginaires du nombre d'onde axial et de la pulsation temporelle. Deux inconnues doivent nécessairement être fixées afin de répondre au problème posé. Pour cela deux théories sont à disposition. La théorie temporelle, qui confère à la perturbation une amplification dans le temps en imposant  $\alpha$ , et la théorie spatiale où la perturbation évolue cette fois-ci en espace pour  $\omega$  fixé.

Bien que [Gaster \(1962\)](#) ait montré qu'il était possible de passer d'une théorie à l'autre à proximité de la courbe neutre en utilisant la notion de vitesse de groupe, la théorie

spatiale est généralement privilégiée dans l'étude de la stabilité des écoulements de type jet où l'amplification et l'amortissement des ondes sont recherchés spatialement et non en un point de l'espace en fonction du temps.

La perturbation est donc définie comme le produit d'une exponentielle réelle et d'une exponentielle imaginaire pure qui caractérisent respectivement l'amplitude et la phase de la perturbation :

$$\mathbf{q}'(x, r, \theta, t) = \widehat{\mathbf{q}}(r) e^{-\alpha_i x} e^{i(\alpha_r x + m\theta - \omega t)} \quad (1.19)$$

Ainsi, la stabilité de l'écoulement de base est uniquement fonction du signe du taux d'amplification,  $\alpha_i$ , tel que :

$$\alpha_i > 0 : \text{écoulement de base convectivement stable} \quad (1.20a)$$

$$\alpha_i < 0 : \text{écoulement de base convectivement instable} \quad (1.20b)$$

$$\alpha_i = 0 : \text{stabilité marginale} \quad (1.20c)$$

Dans leurs travaux, [Crow et Champagne \(1971\)](#) ont appliqué cette démarche afin d'estimer la validité de la méthode sur une configuration réelle. Pour cela, ils ont réalisé à partir des résultats expérimentaux des analyses de stabilité locale en théorie spatiale et temporelle. Ils ont notamment comparé les évolutions du facteur d'amplification et de la vitesse de phase en fonction du nombre d'onde. Les résultats sont reportés sur la Fig. 1.20. À noter que le maximum d'amplification du mode dominant trouvé expérimentalement pour  $St = 0.3$  est mis en évidence par la présence d'un marquage distinctif (●). Si l'estimation du taux d'amplification par la théorie temporelle semble être délicate avec une erreur relative de 47 %, la prévision de la vitesse de phase des modes les plus instables est correcte. L'incapacité évidente de la théorie spatiale à estimer le taux d'amplification sera rapportée par [Mattingly et Chang \(1974\)](#) comme étant la conséquence du choix d'un profil de vitesse discontinu. En effet, modéliser l'inflexion du profil de vitesse par une ligne de glissement n'est pas suffisant pour prévoir correctement le développement de l'instabilité de Kelvin-Helmholtz.

En s'appuyant sur une démarche similaire à celle réalisée par [Crow et Champagne \(1971\)](#), [Chan \(1974a,b\)](#) a étudié les évolutions axiale et radiale des fluctuations de pression d'un jet supersonique soumis à un forçage acoustique périodique. Une analyse de stabilité locale en théorie spatiale a ensuite été réalisée tout en prenant en compte l'épaississement de la couche de mélange dans le profil de vitesse. Les nombres d'onde, les vitesses de phase et les taux d'amplification obtenus théoriquement ont été comparés aux résultats expérimentaux et validés, apportant de nouvelles preuves de la structure ondulatoire des couches de mélange turbulentes. Néanmoins, bien que [Chan \(1974a,b\)](#) ait observé une amplification maximum du mode dominant pour un nombre de Strouhal

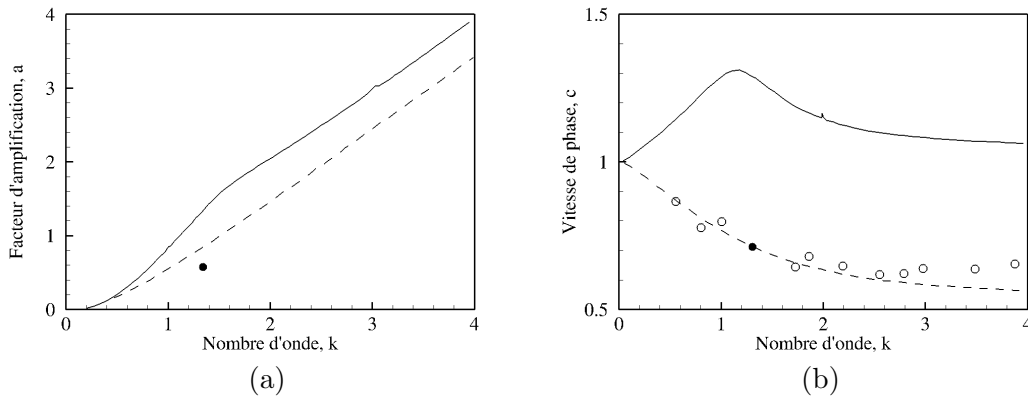


FIGURE 1.20 : Comparaison du facteur d'amplification (a) et de la vitesse de phase (b) issus des mesures (o) et de la stabilité locale en théorie spatiale ( — ) et temporelle ( - - - ) extraite des travaux de [Crow et Champagne \(1971\)](#). (●) correspond au maximum d'amplification du mode dominant mesuré expérimentalement.

conforme aux observations de [Crow et Champagne \(1971\)](#), des écarts apparaissent vis-à-vis de l'estimation de la position axiale de ce maximum. Deux phénomènes sont à considérer afin d'améliorer ces prévisions. Tout d'abord, [Crighton et Gaster \(1976\)](#) ont reconnu l'importance de la prise en compte de la faible divergence du jet. En effet, les faibles variations axiales du champ moyen doivent être retenues afin de considérer l'évolution axiale des modes instables des jets. Le second paramètre est la prise en compte des effets non-linéaires. En effet, suite à une analyse détaillée des jets forcés, [Moore \(1977\)](#) a montré la présence d'effets non-linéaires dès que l'amplitude initiale est supérieure à 0.02 % du maximum de la vitesse axiale. Dans le cas des travaux de [Crow et Champagne \(1971\)](#), où l'amplitude initiale est supérieure à 1 %, une saturation en amplitude provoquée par la naissance d'une harmonique met en défaut la théorie linéaire.

Si cette théorie, de par son caractère local, ne peut tenir compte de l'histoire de l'évolution axiale des instabilités, qui est essentielle à l'estimation du rayonnement acoustique des ondes instables, elle reste néanmoins le point de départ de toute analyse de stabilité.

#### 1.4.2 Méthode des échelles multiples

Afin de considérer les faibles variations des caractéristiques de l'écoulement de base dans la direction axiale  $x$ , [Saric et Nayfeh \(1975\)](#) ont proposé l'introduction d'une nouvelle échelle de variation telle que :

$$\bar{\mathbf{q}} = \bar{\mathbf{q}}(s, r) \quad \text{avec} \quad s = \varepsilon x \quad (1.21)$$

où  $s$  est une variable lente et  $\varepsilon$  est un petit paramètre représentatif de la faible divergence du jet.

Un développement en série de  $\varepsilon^n$  est alors réalisé sur les perturbations (1.22) afin de prendre en compte la faible dépendance en  $x$  des fonctions d'amplitude sous la forme d'une dépendance en  $s$ .

$$\mathbf{q}'(x, r, \theta, t) = \left( \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \hat{\mathbf{q}}(s, r) \right) e^{i \left( \int_{x_0}^x \alpha(\xi) d\xi + m\theta - \omega t \right)} \quad (1.22)$$

où  $\alpha(s)$  est désormais fonction de la position axiale  $x$ . L'introduction de cette décomposition modale dans les équations de Navier-Stokes linéarisées conduit à un nouveau système d'équations, hiérarchisé suivant les puissances de  $\varepsilon$ . La résolution est alors effectuée successivement par ordre croissant des puissances de  $\varepsilon$ . À l'ordre 0, l'équation différentielle homogène préalablement établie dans le cadre de la théorie de stabilité locale est retrouvée. Aux ordres supérieurs, des termes relatifs à la prise en compte de l'évasement du jet apparaissent. Les développements mathématiques devenant importants avec l'ordre étudié, une approximation au premier ordre est généralement considérée comme suffisante.

Si cette méthode des échelles lentement variables, ou échelles multiples, a été adaptée dans un premier temps à l'analyse de la transition laminaire-turbulent des couches limites, [Crighton et Gaster \(1976\)](#) l'ont appliquée à la caractérisation des ondes d'instabilité se développant dans les jets circulaires. Malgré un excellent accord avec les mesures de [Crow et Champagne \(1971\)](#) sur l'estimation de la longueur d'onde, d'autres quantités, comme le taux d'amplification, semblent toujours difficiles à prévoir.

Une explication de ces écarts peut venir du fait que [Crighton et Gaster \(1976\)](#) ont concentré leur analyse sur l'évolution des modes axisymétriques, soit pour un nombre d'onde azimutal nul ( $m = 0$ ). [Chan et Templin \(1974\)](#) puis [Moore \(1977\)](#) ont en effet montré de manière expérimentale que les taux d'amplification des premiers modes hélicoïdaux ( $m = \pm 1$ ) pouvaient être similaires à ceux des modes axisymétriques. Pour un profil de vitesse gaussien, correspondant à la phase pleinement développée du jet, ils ont même remarqué que les modes hélicoïdaux continuaient leur amplification contrairement aux modes axisymétriques, qui étaient eux amortis. Sur une configuration similaire, [Plaschko \(1979\)](#) a complété cette étude en analysant l'amplification des deux premiers modes hélicoïdaux ( $m = 1, 2$ ). Si, pour un nombre de Strouhal élevé, le mode axisymétrique semble être le plus instable, il a montré que pour des nombres de Strouhal plus modestes, le premier mode hélicoïdal est le plus amplifié.

Bien que l'utilisation de la méthode des échelles multiples permette une prévision correcte des taux d'amplification de différents modes instables des jets, le rôle des instabilités dans le mécanisme de génération de bruit des écoulements turbulents n'est jusqu'alors

pas traité. Par la méthode des développements asymptotiques raccordés, [Tam et Burton \(1984a,b\)](#) ont étendu le caractère local de la solution hydrodynamique obtenue par la méthode des échelles multiples à une solution globale valide en champ lointain. La propagation et le rayonnement acoustique des fluctuations de pression générées en champ proche par les ondes d'instabilité peuvent ainsi être déterminés. Une comparaison des niveaux de pression en champ proche obtenus expérimentalement et numériquement est représentée sur la Fig. 1.21 où le pic de directivité dans la direction aval de l'écoulement et les niveaux de pression sont correctement reproduits.

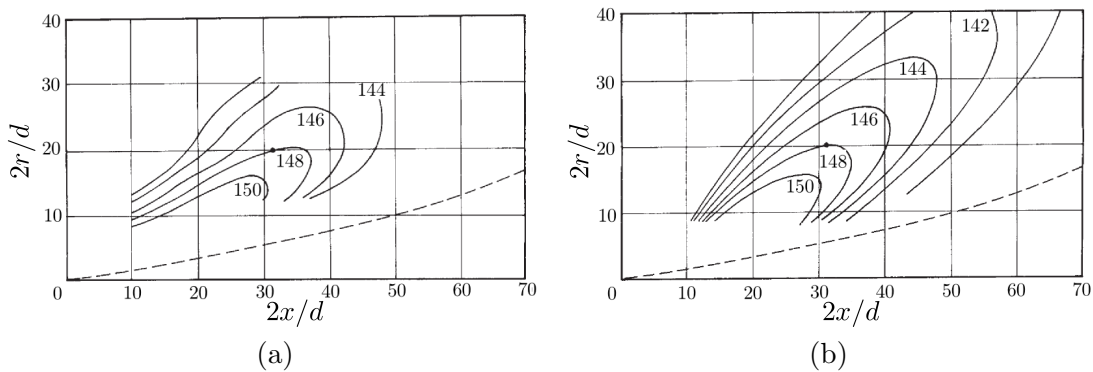


FIGURE 1.21 : Contours des niveaux de pression en champ proche d'un jet excité à un nombre de Strouhal  $St = 0.2$  mesurés expérimentalement par [Troutt et McLaughlin \(1982\)](#) (a) et calculés par [Tam et Burton \(1984b\)](#) (b).

Un autre résultat important publié par [Crighton et Huerre \(1990\)](#) concerne le principe de la modulation en amplitude de l'onde, qui explique un des mécanismes du rayonnement acoustique des jets subsoniques. Ils ont noté qu'une onde à amplitude constante se propageant à une vitesse de phase subsonique n'engendre pas de bruit. Son spectre de nombre d'onde est alors caractérisé par une valeur discrète. En revanche, si une onde croît d'abord en amplitude avant de s'amortir spatialement, son spectre de nombres d'onde s'étale autour de sa valeur principale. Certaines composantes, notamment pour des faibles nombres d'onde, peuvent alors se propager à des vitesses de phase supersoniques et rayonner en champ lointain. L'élargissement du spectre des nombres d'onde est d'autant plus important que le phénomène de croissance et de déclin en amplitude de l'onde est brutal. Il est désormais connu que ce phénomène se trouve justement être plus intense dans le cas des jets subsoniques. Les structures à grande échelle sont donc tout à fait capables de produire un rayonnement intense par ondes de Mach même à des nombres de Mach relativement faibles.

En plus du phénomène de modulation spatiale, [Guj et al. \(2003\)](#) et [Hileman et al. \(2005\)](#) ont noté expérimentalement que les structures cohérentes à grande échelle apparaissent non pas de façon régulière mais par intermittence, par bouffées. En réalisant une modélisation des ondes d'instabilité sous la forme d'enveloppes gaussiennes modulées temporellement, [Sandham et al. \(2006\)](#) ont également montré un rayonnement

directif des paquets d'ondes ayant des vitesses de phase subsonique. Une étude des effets de l'étendue et de la localisation spatio-temporelle de ces paquets d'ondes sur le rayonnement acoustique en champ lointain a été réalisée par [Cavaleri et al. \(2011\)](#). En modélisant les évolutions spatiales et temporelles des paquets d'ondes sous la forme d'enveloppes gaussiennes, [Cavaleri et al. \(2011\)](#) ont appliqué leur modèle sur le cas d'un jet subsonique à  $M_j = 0.9$  obtenu numériquement par DNS et LES. Les niveaux de pression obtenus en champ lointain sont très proches des résultats numériques avec une différence de l'ordre de 1.5 dB, contre 10 dB dans le cas d'un paquet d'onde modulé uniquement en espace. L'évolution temporelle des structures cohérentes à grande échelle a donc également un effet significatif sur le rayonnement acoustique des jets subsoniques.

Si cette méthode permet une évaluation correcte des caractéristiques des ondes d'instabilité et de leur impact sur le rayonnement acoustique, la prise en compte des effets non linéaires reste délicate.

### 1.4.3 Équations de stabilité parabolisées (PSE)

Les équations de stabilité parabolisées sont une généralisation de l'analyse de stabilité locale. Cette méthode, conçue à l'origine par [Bertolotti et Herbert \(1991\)](#) et [Herbert \(1994, 1997\)](#) afin de traiter simultanément les effets non parallèles et non linéaires des couches limites, est en réalité applicable à l'ensemble des écoulements faiblement divergents présentant une situation d'instabilités convectives. Dans le cas présent, les PSE sont utilisées afin de modéliser les ondes d'instabilité en partie responsables du rayonnement acoustique directif des jets turbulents vers l'aval de l'écoulement. La perturbation est écrite sous la forme d'une double série de Fourier, en azimuth et en temps, avec  $m$  le nombre d'onde azimuthal,  $\omega$  la pulsation temporelle,  $n$  l'ordre de l'harmonique fréquentielle et  $\tilde{\mathbf{q}}_{\mathbf{m},\mathbf{n}}$  une fonction modale associée au mode  $(m, n)$ . En plus de tenir compte de la faible divergence de l'écoulement, cette formulation a pour avantage de considérer les interactions croisées entre modes. En pratique, une limitation à un nombre fini  $(M, N)$  de modes résonants est nécessaire, ce qui conduit à une troncature des séries de Fourier. Les échelles non résolues sont alors contenues formellement dans le terme  $\mathbf{q}''$ , soit finalement :

$$\mathbf{q}'(x, r, \theta, t) = \sum_{n=-N}^{+N} \sum_{m=-M}^{+M} \tilde{\mathbf{q}}_{\mathbf{m},\mathbf{n}}(x, r) e^{i(m\theta - n\omega t)} + \mathbf{q}'' \quad (1.23)$$

L'hypothèse d'un écoulement faiblement divergent dans la direction axiale permet la décomposition de la fonction modale  $\tilde{\mathbf{q}}_{\mathbf{m},\mathbf{n}}$  en un terme d'amplitude lentement variable  $\hat{\mathbf{q}}_{\mathbf{m},\mathbf{n}}$  et un terme ondulatoire  $\mathcal{A}_{m,n}$  absorbant les variations axiales rapides de l'onde :

$$\tilde{\mathbf{q}}_{\mathbf{m},\mathbf{n}}(x, r) = \hat{\mathbf{q}}_{m,n}(x, r) \cdot \mathcal{A}_{m,n}(x) = \hat{\mathbf{q}}_{m,n}(x, r) \gamma_{m,n} \exp \left[ i \int_{x_0}^x \alpha_{m,n}(\xi) d\xi \right] \quad (1.24)$$



où  $\gamma_{m,n}$  est une fonction de l'amplitude et de la phase initiales du mode  $(m, n)$ . À noter que ce comportement sera régi par la condition de normalisation présentée ci-après. Cette nouvelle décomposition modale est ensuite introduite dans les équations de Navier-Stokes perturbées. Après soustraction de la contribution de l'écoulement de base et en négligeant les dérivées secondes dans la direction axiale de  $\hat{\mathbf{q}}_{\mathbf{m},\mathbf{n}}$  et de  $\alpha_{m,n}$ , supposées d'ordre inférieur, un système d'équations aux dérivées partielles non homogène quasi-parabolique est obtenu pour chaque mode  $(m, n)$  :

$$\mathcal{P}_{m,n}(\hat{\mathbf{q}}_{\mathbf{m},\mathbf{n}}) = -\frac{\mathcal{F}_{m,n}}{\mathcal{A}_{m,n}} - \frac{\mathcal{F}''_{m,n}}{\mathcal{A}_{m,n}} \quad (1.25)$$

Le terme de gauche de l'équation précédente est un opérateur linéaire vis-à-vis du mode  $(m, n)$  alors que le membre de droite concentre l'ensemble des contributions non linéaires entre modes. Les interactions croisées entre les modes considérés sont incluses dans la fonction  $\mathcal{F}_{m,n}$  alors que celles faisant intervenir les échelles non résolues sont recueillies par la fonction  $\mathcal{F}''_{m,n}$ . Bien que généralement le terme  $\mathcal{F}''_{m,n}$  soit négligé dans la résolution des PSE, une modélisation de ce dernier peut tout à fait être envisagée afin de tenir compte de l'ensemble des échelles de la turbulence, comme réalisé par [Rodríguez et al. \(2011\)](#).

Une relation supplémentaire est toutefois nécessaire à la fermeture du problème. Comme souligné par [Herbert \(1997\)](#), une condition de normalisation est imposée individuellement à chaque mode pour garantir l'hypothèse d'une lente variation axiale des amplitudes  $\hat{\mathbf{q}}_{\mathbf{m},\mathbf{n}}$  :

$$N_{m,n} = \int_0^\infty \hat{\mathbf{q}}_{\mathbf{m},\mathbf{n}}^\dagger \frac{\partial \hat{\mathbf{q}}_{\mathbf{m},\mathbf{n}}}{\partial x} dr = 0 \quad (1.26)$$

où l'exposant  $\dagger$  traduit le complexe conjugué.

Bien qu'une ellipticité résiduelle soit présente, comme noté par [Li et Malik \(1996\)](#), le caractère quasi-parabolique des équations permet leur résolution par une simple méthode de marche en avant dans la direction axiale de l'écoulement de base, ce qui attribue aux PSE une grande efficacité pour un coût du calcul numérique faible. Néanmoins, à l'extérieur du jet, de par le caractère omnidirectionnel des ondes acoustiques, aucune direction n'est *a priori* privilégiée. Ainsi, cette méthode doit nécessairement être couplée à un algorithme de propagation, similaire à ceux utilisés en aéroacoustique numérique, afin d'évaluer le rayonnement acoustique des ondes d'instabilité. Par ailleurs, contrairement à la méthode des échelles multiples, où une singularité apparaît lorsque la vitesse de phase de l'onde est égale à la vitesse de convection du jet, le contournement des pôles du système dans le plan complexe n'est pas nécessaire. Avec une implantation numérique plus aisée que la méthode des échelles multiples, les PSE linéaires se révèlent pertinentes et efficaces pour la prévision de l'effet d'accumulation.

Si les PSE permettent de tenir compte des effets faiblement non linéaires, elles ont été dans un premier temps très largement validées et utilisées dans leur version linéaire en négligeant le terme non homogène de l'équation (1.25). Yen et Messersmith (1998, 1999) ont appliqué cette modélisation au cas d'un jet incompressible analytique ainsi que sur une configuration de jet froid supersonique à  $M_j = 2.1$ , préalablement étudié expérimentalement par Troutt et McLaughlin (1982). Dans le cas du jet supersonique, par un couplage des PSE linéaires avec un modèle de propagation acoustique, un très bon accord est rapporté par Balakumar (1998) vis-à-vis de l'estimation des directivités associées aux perturbations de pression du premier mode hélicoïdal pour deux fréquences,  $St = 0.20$  et  $St = 0.40$ . Dans le cas d'un jet chaud subsonique à  $M_j = 0.7$  et  $T_j/T_0 = 3.0$ , Piot *et al.* (2006) ont également montré une excellente prévision des perturbations de pression obtenues en champ proche jusqu'en fin de cône potentiel à l'aide des PSE, en comparant leurs résultats à la fois à des mesures en chambre anéchoïque et à une simulation numérique aux grandes échelles. Gudmundsson et Colonius (2011) ont appliqué cette méthodologie à l'étude des jets subsoniques chauds et froids pour des nombres de Mach compris entre 0.5 et 0.9. Afin de comparer les résultats obtenus par simulation avec les mesures, une décomposition orthogonale aux valeurs propres (POD) a été appliquée aux mesures afin d'extraire les contributions respectives du mode axisymétrique et des deux premiers modes hélicoïdaux. La Fig. 1.22 montre à quel point les prévisions des amplitudes et des angles de phase des perturbations obtenues par les PSE linéaires sont satisfaisantes, y compris dans la zone d'amortissement de l'onde une fois la POD réalisée.

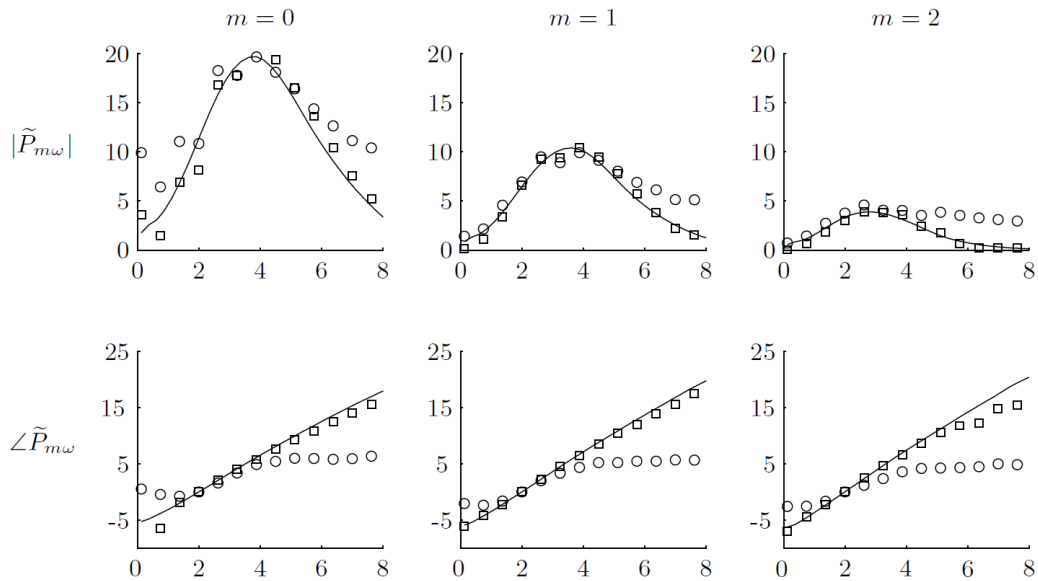


FIGURE 1.22 : Amplitudes et angles de phase des perturbations de pression à  $St = 0.35$  sur l'antenne linéaire positionnée en champ proche d'un jet froid subsonique  $M_j = 0.9$ ,  
(o) : Mesures, ( $\square$ ) : 1er mode POD et (—) Résultats PSE d'après  
Gudmundsson et Colonius (2011)

Des études ont également été entreprises sur des configurations plus complexes. [Léon et Brazier \(2011\)](#) et [Léon \(2012\)](#) ont notamment évalué le mécanisme de génération de bruit associé aux grandes échelles de la turbulence dans le cas des jets subsoniques double-flux, avec un jet primaire chaud et un jet secondaire froid, très proches des configurations réelles. Ils ont remarqué l'apparente dominance acoustique en champ lointain des modes axisymétriques de la couche de mélange interne. Le rayonnement acoustique de la couche de mélange externe s'est révélé quant à lui moins important. En effet, les auteurs expliquent que contrairement à la couche de mélange interne chaude qui, avec une vitesse de phase supersonique par rapport au milieu ambiant, rayonne par onde de Mach, la couche de mélange externe froide possède une vitesse de phase subsonique et ne peut rayonner qu'à travers le mécanisme de modulation spatiale de l'amplitude.

La prise en compte des effets non linéaires par les PSE a été réalisée par [Malik et Chang \(2000\)](#) sur un jet supersonique à  $M_j = 2.5$ , en appuyant leurs résultats sur les mesures effectuées par [Morrison et McLaughlin \(1980\)](#). Si les interactions subharmoniques entre un mode axisymétrique à la fréquence  $f$  et un mode hélicoïdal à la fréquence  $f/2$  sont importantes pour l'étude de la transition laminaire-turbulent, cette non-linéarité s'est avérée inefficace dans le rayonnement acoustique des jets. Au contraire, de façon similaire aux observations effectuées par [Chang et Malik \(1994\)](#) sur les couches de mélange supersoniques, les résonances entre modes hélicoïdaux,  $m = \pm 1$ , provoquent de fortes non-linéarités comme une saturation en amplitude de l'onde, un remplissage rapide du spectre des modes et une importante déformation de l'écoulement moyen. L'ajout d'un algorithme de propagation acoustique basé sur l'analogie de [Lilley \(1974\)](#) afin d'étudier l'influence des non-linéarités sur le rayonnement acoustique des jets a été entrepris par [Cheung et al. \(2007\)](#). Une grande variété de configurations a été passée en revue, allant des jets subsoniques aux jets supersoniques, chauffés ou non. Pour les jets supersoniques, les PSE, en très bon accord avec les résultats DNS, semblent capables de capturer à la fois le champ hydrodynamique proche et le champ acoustique lointain. En subsonique, le champ proche est une fois de plus en accord avec les simulations numériques directes. Des phénomènes complexes comme l'enroulement et l'appariement tourbillonnaire sont correctement reproduits. En champ lointain néanmoins, le couplage proposé par [Cheung et al. \(2007\)](#) s'avère nécessaire afin de ne pas sous-estimer les amplitudes de pression. Un second mécanisme d'interaction non linéaire a également été étudié à l'aide des PSE par [Salgado et al. \(2010b,a\)](#) dans le cas des jets subsoniques forcés. [Ronneberger et Ackermann \(1979\)](#) proposent en effet que le pic de directivité observé en champ lointain pour une fréquence dominante plus faible qu'en champ proche soit causé par une interaction d'harmoniques fréquentielles d'ordre plus élevé. Une très bonne corrélation avec les mesures de [Stromberg et al. \(1980\)](#) est obtenue et les auteurs soulignent que le rayonnement acoustique généré par deux modes forcés est plus efficace qu'un forçage direct du mode à basse fréquence. Pour les jets naturels turbulents en revanche, [Rodríguez et al.](#)

(2011) notent que la richesse du spectre des modes réduit considérablement l'efficacité d'un tel mécanisme.

## 1.5 Stratégies de contrôle pour la réduction du bruit de jet

### 1.5.1 Les principes d'action

La réduction des nuisances sonores engendrées par les avions au cours des trente dernières années est principalement due à l'essor des tuyères co-axiales éjectant un jet double-flux. Un exemple de ces tuyères est représenté sur la Fig. 1.23. Le jet primaire central chaud se trouve entouré d'un écoulement secondaire périphérique froid qui, par augmentation du débit massique total, permet d'augmenter la poussée utile des turboréacteurs. Pour une même poussée, la vitesse de sortie du jet primaire peut donc être réduite, ce qui conduit, comme souligné par Morris et Viswanathan (2011), à de fortes diminutions du rayonnement acoustique et de la consommation en carburant. Cependant, le recours à cette technologie atteint aujourd'hui ses limites. En effet, l'augmentation des performances des tuyères double-flux impose une augmentation du diamètre de la soufflante qui est aujourd'hui limitée par les contraintes dimensionnelles et structurales de l'avion, ainsi que par les normes de sécurité relatives à l'environnement aéroportuaire.

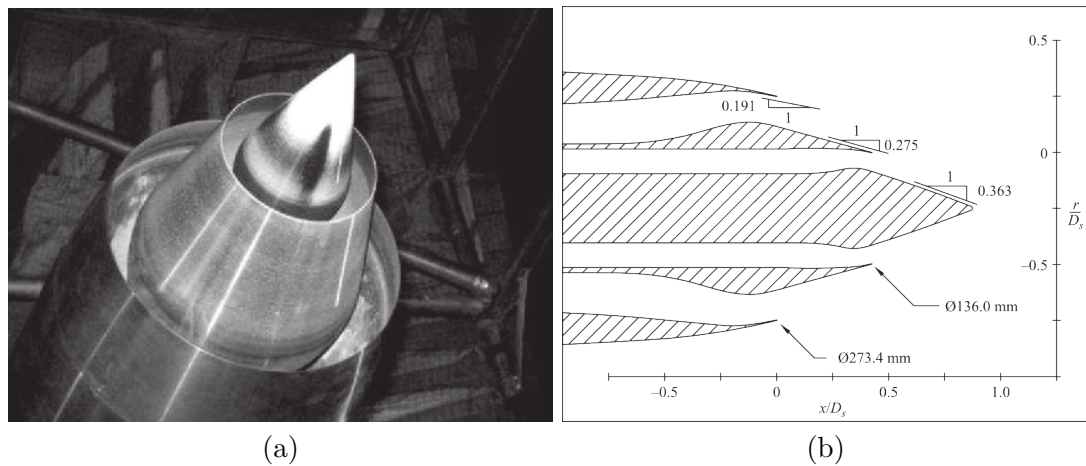


FIGURE 1.23 : Photographie d'une tuyère double-flux de type short-cowl (a) et définition de sa géométrie (b) extrait de Tinney et Jordan (2008)

De nouvelles méthodes innovantes de réduction de bruit sont ainsi à l'étude. Certaines se proposent d'agir directement sur les sources acoustiques par une modification de la dynamique des structures turbulentes évoluant dans la couche de mélange du jet. D'autres approches, quant à elles, s'appuient sur les phénomènes intervenant dans la propagation acoustique en milieu extérieur afin de limiter ou de modifier le rayonnement

acoustique des sources en champ lointain. Dans les deux cas, une connaissance avancée des mécanismes en jeu dans la production de bruit par un jet turbulent est nécessaire. Une distinction en deux catégories est toutefois réalisée en fonction de la nécessité ou non d'un apport en énergie extérieure. Les dispositifs passifs, qui ne font appel à aucune source d'énergie supplémentaire, consistent généralement à influencer sur les conditions initiales du jet par une modification de la géométrie de la tuyère. Les dispositifs actifs en revanche permettent un pilotage dynamique de la couche de mélange et offrent un éventail plus large de possibilités. À titre d'exemple, lorsqu'un contrôle du bruit de jet n'est plus une nécessité, en régime de croisière notamment, le dispositif peut être rendu inactif pour limiter les pertes de poussée qu'il pourrait induire. Ce type de contrôle se divise lui-même en deux sous-catégories, les contrôles actifs en boucle ouverte et les contrôles actifs en boucle fermée. En boucle ouverte, l'activation et le réglage des actionneurs sont prédéterminés ou commandés par un opérateur. En boucle fermée, des informations sur l'écoulement sont prélevées par un ou des capteurs afin d'adapter au mieux la commande de l'actionneur par un système de rétroaction.

Dans la suite de cette section, on présente quelques exemples de dispositifs passifs et actifs en boucle ouverte existants ou à l'étude, ainsi que les conséquences de leurs actions sur les jets.

### 1.5.2 Contrôle passif des sources acoustiques

Le rayonnement acoustique d'un jet est fortement influencé par les conditions initiales de ce dernier. Dans le but d'isoler divers phénomènes, [Viets et Sforza \(1972\)](#) et [Dhanak et Bernardinis \(1981\)](#) ont étudié à la fois théoriquement et expérimentalement la stabilité d'un anneau tourbillonnaire elliptique isolé. Ils ont montré que sa forme elliptique conduit à une variation azimutale de son auto-induction et en aucun cas sa forme initiale ne peut se conserver, contrairement à son homologue circulaire. Dans la continuité de ces travaux, [Hussain et Husain \(1989\)](#) et [Husain et Hussain \(1991, 1993\)](#) ont réalisé une vaste campagne de mesures sur les tuyères elliptiques. Ils ont observé que l'utilisation d'une géométrie elliptique provoquait une réduction de la vitesse de convection des structures turbulentes, une déformation des couches de mélange et une diminution significative du bruit.

Si une modification de la géométrie de la tuyère n'est pas toujours envisageable, une manière différente de détruire l'axisymétrie de l'écoulement consiste à créer de la vorticité longitudinale, au détriment de la vorticité azimutale, par l'introduction de pièces mécaniques aux lèvres de la tuyère, comme des onglets. Les onglets correspondent à des rabats de forme variée au bord de fuite de la tuyère. Ils pénètrent dans l'écoulement avec un angle pouvant aller jusqu'à 45 . [Bradbury et Khadem \(1975\)](#) ont remarqué que l'ajout d'onglets rectangulaires en périphérie de la tuyère avait un effet significatif sur

le développement du jet. Par la simple introduction de deux onglets, ils ont noté une dynamique surprenante avec une quasi-séparation du jet en deux. Dans le cas des jets supersoniques, [Samimy \*et al.\* \(1991\)](#) ont remarqué que les modifications importantes provoquées par les onglets sur les cellules de choc, provoquaient une disparition du bruit de raie. Après une étude extensive de l'influence du nombre d'onglets, de leur forme et de leur taux de pénétration dans l'écoulement, deux onglets triangulaires inclinés avec un angle de  $45^\circ$  vers l'intérieur du jet semblent être la configuration la plus efficace en terme de réduction de bruit, d'après [Zaman \*et al.\* \(1992\)](#). D'un point de vue physique, l'introduction d'un ongle dans l'écoulement conduit à la formation de deux tourbillons contra-rotatifs de part et d'autre de sa base qui scindent le jet principal en autant de jets secondaires que le nombre d'onglets présents. [Hileman \(2004\)](#) suggère que son efficacité est due à une modification du caractère azimuthal des émissions acoustiques. La Fig. 1.24 montre en effet une faible émission acoustique dans la zone de vorticité longitudinale qui conduit à un aplatissement de la région source. Toutefois, la réduction de la section de sortie conduit à des pertes de poussée non négligeables de l'ordre de 0.30% pour des applications industrielles.

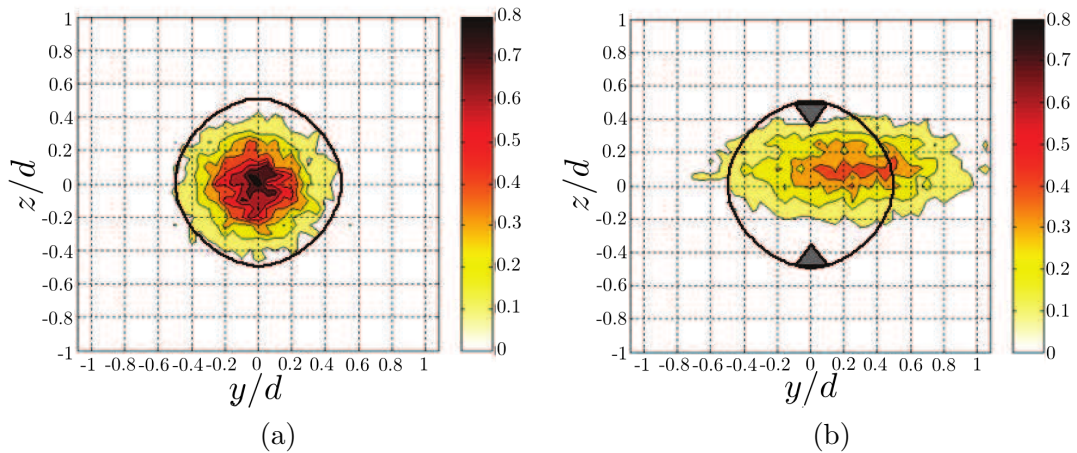


FIGURE 1.24 : Densité de probabilité bidimensionnelle de localisation de source acoustique sur une section perpendiculaire à l'axe d'un jet supersonique à  $M_j = 1.3$  pour une tuyère classique (a) et l'ajout de deux onglets (b), extrait de [Hileman \(2004\)](#)

Afin de limiter ces pertes, l'utilisation de tuyères dentelées ou lob es est également possible. À noter toutefois, que l'introduction de turbulence génère inévitablement une augmentation plus ou moins raisonnable de la consommation de carburant. Une étude paramétrique a été réalisée par [Bridges et Brown \(2004\)](#) afin de déterminer une relation entre la géométrie des chevrons, les caractéristiques de l'écoulement et le rayonnement acoustique en champ lointain. Dix modèles de lèvres ont ainsi été testés en modifiant le nombre de chevrons, leur longueur, leur angle de pénétration et leur symétrie de répartition, comme représenté sur la Fig. 1.25. Si la longueur des chevrons a peu d'influence sur l'écoulement et le bruit engendré, l'impact de l'angle de pénétration



est immense avec une réduction du bruit à basse fréquence et une augmentation à haute fréquence. En effet, [Callender et Gutmark \(2005\)](#) ont noté une réduction à basse fréquence de 8 dB par l'utilisation d'une tuyère à chevrons optimisés. Cependant, le bruit à haute fréquence est quant à lui augmenté de 5 dB. Ils ont également montré qu'une asymétrie de répartition des chevrons est moins efficace d'un point de vue de l'acoustique. Si ce dispositif semble prometteur, les gains obtenus restent relativement faibles et les pertes de poussée de l'ordre de 0.15%, bien que diminuées de moitié, sont toujours non négligeables.

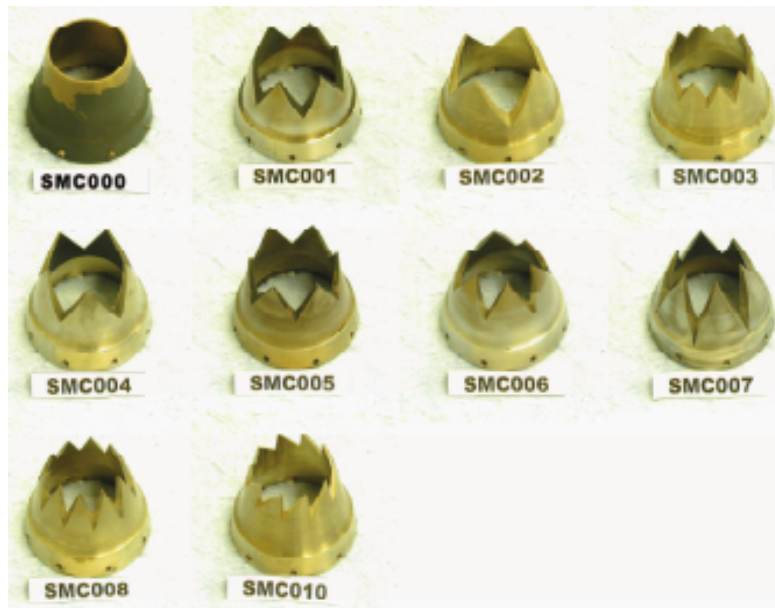


FIGURE 1.25 : Photographie de tuyères à chevrons réalisée par [Bridges et Brown \(2004\)](#)

### 1.5.3 Dispositifs actifs de contrôle continu

Afin de remédier à la perte de poussée systématiquement induite par les dispositifs de contrôle mécanique, des études tentent d'agir sur le jet à l'aide d'actionneurs acoustiques, fluidiques ou plasmas. Le système serait ainsi rendu inactif en phase de croisière afin de ne pas dégrader les performances en vol de l'avion.

Suite au vol inaugural de la fusée Ariane 5 le 4 juin 1996, qui s'est malheureusement soldé par un échec, [Zoppellari et Juvé \(1998\)](#) et [Gély \*et al.\* \(2000\)](#) ont étudié l'effet d'une injection continue d'eau en sortie de buse en vue d'une application pour l'industrie spatiale. Cette méthode s'est avérée particulièrement efficace avec une réduction du bruit rayonné de 7 dB pour un jet chaud fonctionnant à  $M_j = 1.7$ . Une des principales limitations reste néanmoins le rapport des débits massiques de l'eau et de l'air de l'ordre de 4. Même si [Krothapalli \*et al.\* \(2003\)](#) ont montré qu'il était possible d'obtenir des résultats similaires pour un jet chaud subsonique avec un rapport de débits massiques

de 0.17, l’approvisionnement en eau reste une contrainte forte qui ne laisse pas envisager aujourd’hui une utilisation possible sur un aéronef.

Un contrôle fluide par une injection continue d’air semble quant à lui plus envisageable. Des mesures par Vélocimétrie par Images de Particules (PIV) ont été réalisées par [Arakeri et al. \(2003\)](#) afin d’étudier l’effet de micro-jets sur l’aérodynamique et le champ proche acoustique d’un jet axisymétrique subsonique à  $M_j = 0.9$ . Une diminution significative de l’intensité turbulente a été notée ainsi qu’une réduction de 2 dB des niveaux de pression dans la direction latérale du jet pour un débit massique de seulement 1.12 % avec pour référence le jet principal. En remarquant que les micro-jets avaient un effet stabilisateur sur le jet, par une réduction du pic de vorticité dans la couche de mélange suite à une modification du profil de vitesse moyenne, [Arakeri et al. \(2003\)](#) ont évoqué le fait qu’une altération de la stabilité de la couche de mélange initiale peut conduire à une modification significative de la dynamique et du rayonnement acoustique du jet.

Afin de comprendre les mécanismes d’interaction entre le jet et le filet d’air issu du dispositif, [Laurendeau et al. \(2008\)](#) ont réalisé, en parallèle avec des mesures PIV et LDV sur un jet à faible nombre de Mach, une simulation numérique directe sur une couche de mélange plane. Le montage expérimental est présenté sur la Fig. 1.26. Deux zones ont pu être identifiées : une région à proximité des lèvres de la buse où la dynamique est dominée par les interactions entre le jet principal et les microjets, et une région lointaine où le jet retrouve un comportement similaire à celui d’un jet non perturbé avec toutefois une diminution notable de l’intensité turbulente. En effet, l’éjection d’un filet d’air fortement turbulent a un effet spectaculaire sur la production locale d’énergie cinétique turbulente qui se trouve réduite de 70%. Une modification notable des échelles intégrales radiales a également été soulignée.

De façon similaire aux travaux réalisés par [Bridges et Brown \(2004\)](#) sur les onglets, [Castelain et al. \(2008\)](#) ont réalisé une étude paramétrique expérimentale pour quantifier l’impact du débit massique, du nombre, de la répartition et du diamètre des micro-jets sur le rayonnement acoustique d’un jet subsonique. Pour cela, deux systèmes de contrôle ont été utilisés, un de 36 micro-jets de 1 mm de diamètre et un de 16 micro-jets avec une tuyère amovible pour étudier l’effet du diamètre. Une photographie de chaque dispositif est présentée sur la Fig. 1.27. Que ce soit en aval ou perpendiculairement à l’axe du jet, une réduction du bruit est observée avec l’augmentation du débit. Cependant, les micro-jets n’influencent pas le domaine fréquentiel de façon uniforme. En effet, si en aval les micro-jets réduisent de façon privilégiée les basses fréquences  $St \leq 0.5$ , perpendiculairement à l’axe du jet ce sont les fréquences intermédiaires qui sont concernées  $0.5 \leq St \leq 2.5$ . Toutefois à partir d’un certain débit massique, la création de hautes-fréquences  $St \geq 2.5$  par les micro-jets compense la réduction aux fréquences intermédiaires et limite l’effet du débit massique dans la direction latérale



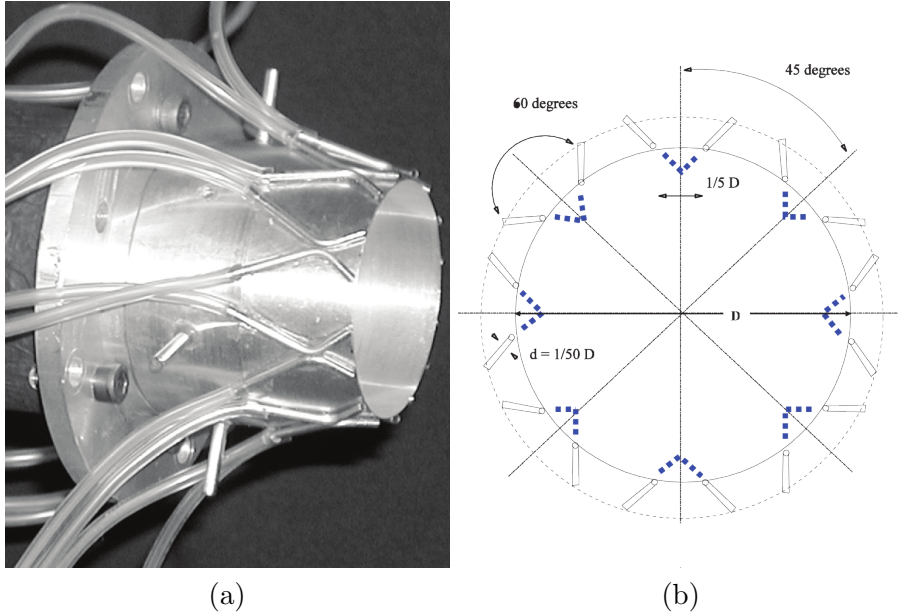


FIGURE 1.26 : Photographie (a) et vue axiale schématique (b) d'une tuyère équipée d'un système de contrôle par jets fluidiques extrait de [Laurendeau \*et al.\* \(2008\)](#)

du jet. [Castelain \*et al.\* \(2008\)](#) ont également noté que le rayonnement acoustique du jet diminue avec l'augmentation du nombre de micro-jets. En revanche, pour un nombre important de micro-jets, l'effet du nombre semble être limité. En étudiant l'effet de la répartition azimutale des micro-jets, ils ont montré que cette perte d'efficacité des micro-jets apparaît lorsque les interactions entre micro-jets sont significatives. Un espacement minimum est donc nécessaire pour profiter pleinement de la réduction du rayonnement acoustique offerte par le système. De même, la réduction du bruit de jet augmente significativement avec le diamètre des micro-jets, appuyant une fois de plus le rôle du débit massique.

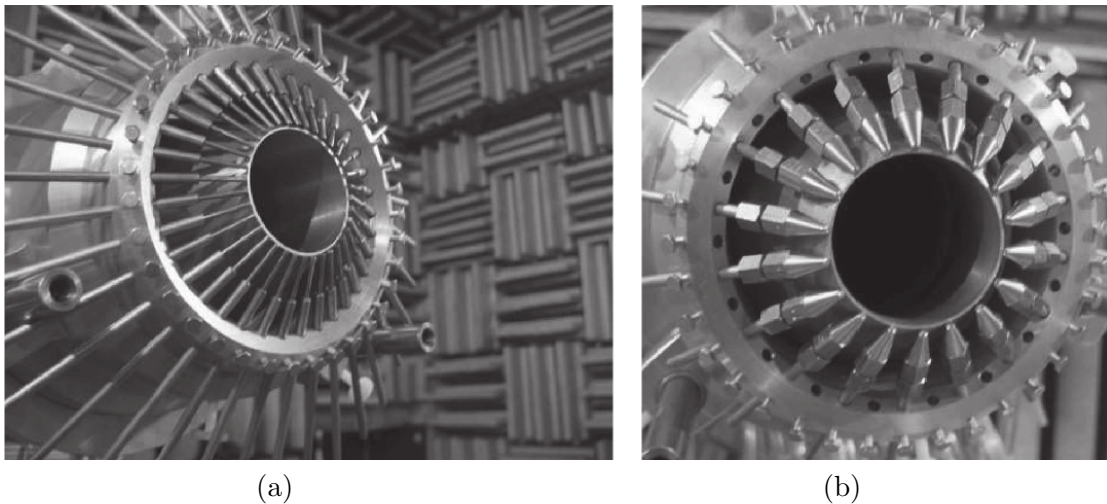


FIGURE 1.27 : Photographies des systèmes de contrôle par 36 micro-jets de 1 mm de diamètre (a) et par 16 micro-jets avec tuyères amovibles (b) extrait de [Castelain \*et al.\* \(2008\)](#)

#### 1.5.4 Dispositifs actifs de contrôle instationnaire

Une approche différente consiste à utiliser des dispositifs de contrôle pilotés en fréquence sur une gamme proche de celle des instabilités de l'écoulement. La motivation première qui a conduit à l'utilisation de tels dispositifs était de pouvoir régulariser l'enroulement et l'appariement tourbillonnaire des structures cohérentes à grandes échelles afin de simplifier l'analyse physique à l'origine de ce phénomène. Peu à peu, cet objectif a évolué vers l'amélioration du mélange et la réduction du rayonnement acoustique comme dans les travaux de [Crow et Champagne \(1971\)](#) mentionnés précédemment. Certaines études ont même étudié l'effet d'un forçage non pas d'une mais de plusieurs fréquences simultanées sur le comportement dynamique et acoustique des jets. Notamment, [Ronneberger et Ackermann \(1979\)](#) ont montré expérimentalement que le forçage acoustique d'un jet pleinement turbulent à deux fréquences  $f_1$ ,  $f_2$  provoque l'émergence des fréquences  $f_1 - f_2$ ,  $f_1 + f_2$ ,  $2f_1 - f_2$  et  $2f_2 - f_1$ . Toutefois, ils ont noté que la différence fréquentielle  $f_1 - f_2$  prédomine sur l'ensemble des combinaisons possibles à la fois en champ proche et en champ lointain. Ainsi, de nombreuses recherches se sont concentrées par la suite sur l'analyse des interactions entre l'instabilité fondamentale de la couche de mélange de jet et sa sous-harmonique par un forçage simultané d'harmoniques fréquentielles afin d'étudier le processus de l'appariement tourbillonnaire. En faisant varier la phase entre les deux signaux, [Arbey et Ffowcs Williams \(1984\)](#) ont montré qu'il est possible d'altérer le processus d'appariement, voire même de le faire « disparaître ». À noter qu'une étude paramétrique sur l'amplitude, la fréquence et la différence de phase des signaux a été menée par [Raman et Rice \(1991\)](#). Toutefois, ces études restent limitées à des nombres de Reynolds modérés.

Dans le but de contrôler à terme des jets à hautes vitesses et à grand nombre de Reynolds, plus proches des configurations industrielles, il est nécessaire d'utiliser des dispositifs de contrôle capables de délivrer des fortes amplitudes d'excitation sur une large bande fréquentielle. Les actionneurs actuellement à l'étude s'appuient principalement sur les technologies plasma. Seules deux technologies seront présentées dans la suite, les LAFPA (Localized Arc Filament Plasma Actuator) et les PSJ (Plasma Synthetic Jet).

Le contrôle par LAFPA consiste à disposer dans la tuyère, juste en amont de la zone d'éjection, plusieurs paires d'électrodes réparties équitablement en azimuth comme décrit par [Samimy \*et al.\* \(2004\)](#). Des condensateurs permettent la production d'impulsions à haute tension pouvant délivrer jusqu'à 10 kV avec un taux de répétition allant de quelques hertz à 200 kHz. Le temps d'impulsion est de 0.1  $\mu$ s et le rapport cyclique est variable de 0 à 100 %. Cette haute tension est ensuite transmise au contrôleur provoquant le claquage de l'air situé entre les deux électrodes et la création d'un arc électrique à l'origine d'une augmentation locale et brutale de la pression et de la température. Chaque

contrôleur est piloté indépendamment des autres en fréquence, en phase et en rapport cyclique, ce qui permet d'exciter le jet à une fréquence donnée et à un mode azimutal donné. Samimy *et al.* (2007) et Kearney-Fischer *et al.* (2009) ont étudié expérimentalement en chambre anéchoïque l'effet des LAFPA sur le rayonnement acoustique d'un jet subsonique isotherme puis chauffé pour  $M_j = 0.9$ . Avec huit contrôleurs au sein de la tuyère, le forçage de différents modes azimutaux, de  $m = 0$  à  $m = 4$ , a été réalisé, et ce, sur une large gamme fréquentielle. Dans le cas du jet isotherme, pour les basses fréquences d'excitation  $St \leq 1.0$ , une augmentation du bruit rayonné a été observée avec une amplification maximale de 4 dB lors du forçage du jet à sa fréquence privilégiée  $St = 0.3$ . En revanche, pour des fréquences et des nombres azimutaux plus élevés, une diminution des niveaux de pression a été notée à la fois en aval et perpendiculairement à l'axe du jet. De plus, Kearney-Fischer *et al.* (2009) ont remarqué que l'augmentation de la température du jet augmente l'efficacité des LAFPA pour réduire le bruit rayonné.

Le générateur de PSJ est constitué de trois éléments, une anode, une cathode et un isolant électrique dont l'ensemble forme une cavité débouchant sur l'écoulement par un orifice, comme décrit par Caruana *et al.* (2009) et Hardy (2012). De façon similaire aux LAFPA, en appliquant une forte tension entre les deux électrodes, un arc électrique se forme et provoque une augmentation rapide de la température et de la pression dans la cavité. L'air se détend alors à travers l'orifice et crée un micro-jet vers l'extérieur. À noter toutefois que si le nombre de Mach à l'éjection des JSP peut atteindre  $M_j = 1.3$ , la fréquence d'excitation, bien que raisonnable, reste actuellement limitée à quelques kHz. En effet, à plus haute fréquence, la température dans la cavité n'a pas le temps de se rétablir, conduisant à une perte d'efficacité de l'actionneur. Hardy (2012) a effectué des mesures sur un jet subsonique froid à  $M_j = 0.6$  issu d'une tuyère de diamètre  $d_j = 50$  mm munie de 12 actionneurs PSJ. La fréquence d'excitation étant limitée à  $St = 0.5$ , une augmentation du rayonnement acoustique du jet a été observée. Toutefois, en faisant varier à la fois le nombre d'onde azimutal et la fréquence de l'excitation, les résultats obtenus sont en accord avec ceux de Samimy *et al.* (2007). Une réduction du bruit de jet à l'aide des PSJ est donc envisageable sous réserve d'une augmentation de la fréquence de fonctionnement. Récemment, Chedevergne *et al.* (2015) ont réalisé une étude à la fois expérimentale par PIV et numérique par LES pour étudier la réponse du jet précédemment mentionné soumis à un micro-jet synthétique unique créé par PSJ dans le but de mieux appréhender les mécanismes physiques d'interaction sous-jacents. Les résultats expérimentaux et numériques ont montré des résultats similaires avec la formation d'une structure cohérente à grande échelle se développant dans la couche de mélange du jet sous l'effet de l'actionneur. Par une analyse détaillée des résultats de la simulation numérique, Chedevergne *et al.* (2015) ont montré que l'onde de pression engendrée par l'actionneur était en grande partie responsable de la formation de cette

structure à grande échelle, le micro-jet synthétique jouant quant à lui un rôle a priori secondaire.

**S**I l'étude bibliographique se concentre dans un premier temps sur l'origine des écoulements de type jet, rapidement l'accent est mis sur le rôle clé de la turbulence dans leur dynamique complexe et non linéaire. En particulier, le mécanisme de développement initial de l'instabilité de la couche de mélange conduisant à la formation de structures cohérentes à grande échelle est décrit. En effet, ces structures ont non seulement un impact capital sur la dynamique du jet mais également sur son rayonnement acoustique.

Les trois composantes du rayonnement acoustique sont ensuite décrites dans le cas d'un jet supersonique non adapté en pression, à savoir le bruit de mélange turbulent, le bruit de choc et le bruit de raie. Dans le cas des jets subsoniques et supersoniques adaptés, cadre de l'étude, seule la composante du bruit de mélange turbulent est présente de par la disparition des cellules de choc. Deux mécanismes distincts sont mentionnés pour décrire cette composante large-bande : un bruit à basse fréquence très directif dans la direction aval du jet, associé aux grandes échelles de la turbulence, et un bruit plus uniforme dans toutes les directions, généralement attribué aux petites échelles de la turbulence.

Ensuite, une description des différentes méthodes de prévision du bruit de jet est proposée. Celle-ci s'étend des analogies acoustiques qui, bien qu'efficaces, nécessitent une connaissance préalable du champ hydrodynamique, aux simulations numériques, qui améliorent tous les jours notre compréhension physique des mécanismes en jeu, mais restent relativement coûteuses. Une attention particulière est portée aux méthodes d'analyse de stabilité, notamment celle basée sur les équations de stabilité parabolisées (PSE). Ces méthodes, en assimilant les structures à grande échelle à des ondes d'instabilité, ont permis d'identifier le rôle majeur de ces structures dans les mécanismes de génération de bruit pour un coût relativement faible.

Finalement, une vue d'ensemble des stratégies de contrôle existantes ou à l'étude pour réduire le bruit de jet est réalisée. Deux méthodologies différentes sont envisagées. La première consiste à améliorer le mélange et à stabiliser le jet par une modification du profil de vitesse moyenne. La seconde s'oriente sur une manipulation des ondes d'instabilité responsables du rayonnement directif intense des jets dans la direction aval. Outre la faisabilité technique, deux questions permettent de comprendre toute la difficulté qui réside dans ces dispositifs de contrôle. Est-il effectivement possible de réduire le bruit de jet par une manipulation des ondes d'instabilité ? Si oui, comment les exciter correctement pour réduire le bruit et non l'augmenter ?

C'est dans ce contexte et dans la continuité des études présentées jusqu'alors que s'inscrivent nos travaux. Ainsi, un premier objectif est de voir si dans le cas d'un jet subsonique naturel les non linéarités ont un impact significatif sur sa dynamique et son rayonnement acoustique, par l'application d'un modèle PSE. Par la même occasion, cela pourrait permettre d'améliorer les prévisions des fluctuations de pression en champ proche, notamment en fin de cône potentiel. Un deuxième objectif consiste alors à étudier la possibilité de manipuler ces ondes d'instabilités par non linéarité en vue d'une réduction du rayonnement acoustique.



# Modélisation des instabilités hydrodynamiques des jets par les PSE dans un contexte non linéaire

**D**ANS le cas des jets où les fluctuations ont des vitesses de phase supersoniques, les PSE linéaires prévoient efficacement l'évolution des ondes d'instabilité. En revanche, dans le cas des jets subsoniques froids, où les vitesses de phase sont subsoniques, des écarts notables sont observés. Bien que la modulation temporelle des paquets d'ondes semble être une source importante de bruit, la prise en compte des non linéarités pourrait permettre d'améliorer ces prévisions. Dans ce chapitre, on se propose donc de développer les PSE dans un contexte faiblement non linéaire pour prendre en compte des interactions entre ondes d'instabilité. Les hypothèses faites à la fois sur l'écoulement de base et sur les perturbations sont explicitées et discutées. La méthode de résolution numérique du système y est détaillée, en mettant l'accent sur le calcul des termes non linéaires.

## Sommaire

<b>2.1</b>	<b>Développement des équations du mouvement perturbées . . . . .</b>	<b>48</b>
2.1.1	Les équations de Navier-Stokes . . . . .	48
2.1.2	Formulation adimensionnelle des équations de Navier-Stokes . . . . .	49
2.1.3	Détermination du champ de base . . . . .	50
2.1.4	Discussion sur l'importance des termes visqueux . . . . .	52
2.1.5	Les équations d'Euler perturbées . . . . .	53
2.1.6	Projection des équations perturbées dans le repère cylindrique . . . . .	53
<b>2.2</b>	<b>Développement des PSE dans un contexte faiblement non linéaire</b>	<b>55</b>
2.2.1	Forme modale des perturbations . . . . .	55
2.2.2	Discussion sur les modes stationnaires . . . . .	56
2.2.3	Symétries du problème . . . . .	57
2.2.4	Formulation matricielle du système PSE . . . . .	57
2.2.5	Nature du système PSE . . . . .	59
2.2.6	Condition de normalisation . . . . .	60
2.2.7	Conditions initiales . . . . .	62
2.2.8	Conditions aux limites sur l'axe . . . . .	64
2.2.9	Conditions aux limites en champ lointain . . . . .	66
<b>2.3</b>	<b>Résolution du système PSE non linéaire . . . . .</b>	<b>67</b>
2.3.1	Discrétisation du domaine de calcul . . . . .	67
2.3.2	Détermination des termes non linéaires . . . . .	68
2.3.3	Approximation des dérivées axiales . . . . .	70
2.3.4	Approximation des dérivées radiales . . . . .	71
2.3.5	Résolution du système . . . . .	72

## 2.1 Développement des équations du mouvement perturbées

### 2.1.1 Les équations de Navier-Stokes

Les fluides obéissent aux équations générales de la mécanique des milieux continus. Dans une représentation eulérienne, où en tout point d'un domaine  $\Omega$  l'évolution temporelle de l'état fluide est observée, l'écriture mathématique du mouvement aboutit aux équations de Navier-Stokes. Les variables indépendantes  $\mathbf{x}^*$  et  $t^*$  sont les variables d'Euler. Les grandeurs physiques caractéristiques de l'état fluide sont quant à elles la masse volumique  $\rho^*$ , le champ de vitesse  $\mathbf{u}^*$ , la pression statique  $p^*$ , la température statique  $T^*$  et l'énergie interne  $e^*$ . Les équations de Navier-Stokes se décomposent plus généralement sous la forme de trois équations de conservation de la masse (2.1), de la quantité de mouvement (2.2) et de l'énergie interne (2.3) :

$$\frac{\partial \rho^*}{\partial t^*} + \nabla^* \cdot (\rho^* \mathbf{u}^*) = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial (\rho^* \mathbf{u}^*)}{\partial t^*} + \nabla^* \cdot (\rho^* \mathbf{u}^* \otimes \mathbf{u}^*) = -\nabla^* p^* + \nabla^* \cdot \boldsymbol{\tau}^* + \rho^* \mathbf{f}^* \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial (\rho^* e^*)}{\partial t^*} + \nabla^* \cdot (\rho^* e^* \mathbf{u}^*) = -p^* (\nabla^* \cdot \mathbf{u}^*) - \nabla^* \cdot \boldsymbol{\varphi}_c^* + \Phi_D^* + \rho^* \varphi_\tau^* \quad (2.3)$$

où  $\boldsymbol{\tau}^*$  représente le tenseur des contraintes visqueuses,  $\boldsymbol{\varphi}_c^*$  l'intensité de flux de chaleur par conduction,  $\varphi_\tau$  la chaleur massique apportée soit par rayonnement soit par effet Joule dans le cas de phénomènes électromagnétiques,  $\Phi_D^*$  la fonction de dissipation et  $\mathbf{f}^*$  les forces massiques telles que les forces de gravité ou de Laplace.

Dans le cadre de l'hypothèse de fluide Newtonien et de celle de Stokes, le tenseur des contraintes visqueuses  $\boldsymbol{\tau}^*$  et la fonction de dissipation  $\Phi_D^*$  se simplifient et s'expriment en faisant intervenir  $\mu^*$  la viscosité dynamique, soit respectivement :

$$\boldsymbol{\tau}^* = \mu^* [(\nabla^* \otimes \mathbf{u}^*) + (\nabla^* \otimes \mathbf{u}^*)^T] - \frac{2\mu^*}{3} (\nabla^* \cdot \mathbf{u}^*) \mathbf{I} \quad (2.4)$$

$$\Phi_D^* = \frac{1}{2\mu^*} \boldsymbol{\tau}^* \odot \boldsymbol{\tau}^* \quad (2.5)$$

avec  $\mathbf{I}$  la matrice identité et  $\odot$  le produit tensoriel contracté deux fois.

L'intensité de flux de chaleur par conduction  $\boldsymbol{\varphi}_c^*$  s'exprime quant à elle par l'intermédiaire de la loi de Fourier, en désignant par  $\lambda_c^*$  le coefficient de conductivité thermique du fluide :

$$\boldsymbol{\varphi}_c^* = -\lambda_c^* \nabla^* T^* \quad (2.6)$$

Afin de simplifier l'équation de conservation de l'énergie interne, il est souvent préférable de reformuler cette dernière par une équation pour l'entropie. La relation

de Gibbs permet de lier la variation d'entropie aux variations des autres grandeurs thermodynamiques pour un phénomène réversible :

$$T^* dS^* = de^* + p^* d\left(\frac{1}{\rho^*}\right) \quad (2.7)$$

Après utilisation de l'équation de conservation de la masse, elle peut s'exprimer de la manière suivante :

$$\rho^* T^* \frac{dS^*}{dt^*} = \rho^* \frac{de^*}{dt^*} + p^* (\nabla^* \cdot \mathbf{u}^*) \quad (2.8)$$

Après substitution des termes d'énergie interne préalablement établis, une nouvelle équation de conservation est ainsi formulée :

$$\rho^* T^* \frac{dS^*}{dt^*} = -\nabla^* \cdot \boldsymbol{\Phi}_c^* + \Phi_D^* + \rho^* \varphi_\tau^* \quad (2.9)$$

Dans le cadre de cette étude, où les forces de pesanteur sont négligeables devant celles liées au mouvement fluide, où les nombres de Mach restent modérés et compte tenu de l'absence de phénomènes électromagnétiques, les forces massiques  $\rho^* \mathbf{f}^*$  et les flux de rayonnement  $\rho^* \varphi_\tau^*$  seront négligés dans la suite de ce manuscrit.

### 2.1.2 Formulation adimensionnelle des équations de Navier-Stokes

L'analyse dimensionnelle permet de mettre en évidence les paramètres essentiels dont vont dépendre les solutions. Des grandeurs de référence sont ainsi introduites de manière à rendre sans dimension les variables de l'écoulement. Le diamètre  $d$  de la tuyère et la vitesse axiale du jet  $U_j$  en sortie de buse sont choisis respectivement comme longueur et vitesse de référence. Il s'en suit une échelle de temps de référence  $d/U_j$ . Les variables indépendantes adimensionnelles d'Euler s'écrivent donc :

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{x}^*}{d}; \quad t = \frac{t^* U_j}{d} \quad (2.10)$$

Au même titre que la vitesse, les grandeurs de référence pour les variables dépendantes et les grandeurs thermodynamiques sont prises sur l'axe en sortie de tuyère et représentées par un indice  $j$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \frac{\mathbf{u}^*}{U_j}; \quad \rho = \frac{\rho^*}{\rho_j}; \quad p = \frac{p^*}{\rho_j U_j^2}; \quad T = \frac{T^*}{T_j} \\ \mu &= \frac{\mu^*}{\mu_j}; \quad \lambda_c = \frac{\lambda_c^*}{\lambda_{c_j}}; \quad e = \frac{e^*}{C_v T_j} \end{aligned} \quad (2.11)$$

Le processus d'adimensionnement des équations de Navier-Stokes fait intervenir trois paramètres dits de similitude que sont le nombre de Reynolds  $Re_d$ , le nombre de Mach



$M_j$  et le nombre de Prandtl  $Pr$  :

$$Re_d = \frac{\rho_j U_j d}{\mu_j} \quad (2.12)$$

$$M_j = \frac{U_j}{c_j} \quad (2.13)$$

$$Pr = \frac{\mu_j C_p}{\lambda_{c_j}} \quad (2.14)$$

À condition de fixer la valeur de ces paramètres, les solutions obtenues sont indépendantes du choix des grandeurs de référence. L'étude générale peut ainsi être utilisée pour différents cas d'applications. La célérité du son en sortie de buse  $c_j$  intervient désormais au cœur même des équations et peut être reliée à la pression  $p_j$ , à la densité  $\rho_j$  et à la température  $T_j$  par l'intermédiaire de la loi des gaz parfaits :

$$c_j = \sqrt{\gamma \frac{p_j}{\rho_j}} = \sqrt{\gamma R_s T_j} \quad (2.15)$$

où  $\gamma$  et  $R_s$  sont respectivement le coefficient adiabatique et la constante spécifique de l'air.

Des relations adimensionnelles pour la pression  $p_j$  et l'enthalpie  $e_j$  en sortie de tuyère sont également obtenues :

$$\frac{p_j}{\rho_j U_j^2} = \frac{1}{\gamma M_j^2} \quad (2.16a)$$

$$e_j = \frac{1}{(\gamma - 1)} \frac{p_j}{\rho_j} = \frac{c_j^2}{\gamma (\gamma - 1)} \quad (2.16b)$$

Une nouvelle formulation, sans dimension, des équations de Navier-Stokes est ainsi explicitée :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (2.17a)$$

$$\frac{\partial (\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = -\nabla p + \frac{1}{Re_d} (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}) \quad (2.17b)$$

$$\rho T \left[ \frac{\partial S}{\partial t} + \nabla S \cdot \mathbf{u} \right] = \frac{\gamma}{Pr Re_d} \nabla \cdot (\lambda_c \nabla T) + \gamma (\gamma - 1) \frac{M_j^2}{Re_d} \Phi_D \quad (2.17c)$$

### 2.1.3 Détermination du champ de base

Comme déjà introduit dans le chapitre 1.4, la démarche consiste à étudier la stabilité d'un écoulement de base stationnaire  $\bar{\mathbf{q}}(\mathbf{x})$  soumis à une perturbation  $\mathbf{q}'(\mathbf{x}, t)$  :

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) = \bar{\mathbf{q}}(\mathbf{x}) + \mathbf{q}'(\mathbf{x}, t) \quad (2.18)$$

À noter qu'en suivant ce formalisme, l'écoulement de base est supposé satisfaire les équations de Navier-Stokes stationnaires. Si généralement, le champ moyen obtenu numériquement ou expérimentalement est choisi comme champ de base pour réaliser une étude de stabilité, ce choix peut être inadapté pour des écoulements turbulents, comme mentionné par Bagheri *et al.* (2009). Afin d'obtenir une solution d'équilibre stationnaire pour l'étude d'un jet débouchant dans un écoulement transverse, ces derniers ont couplé leur résolution DNS à une méthode de filtrage fréquentiel proposée par Akervik *et al.* (2006). Une visualisation du critère  $\lambda_2$ , appliqué à un champ de vitesse instantanée issu du calcul DNS et au champ de base convergé, est présentée sur la Fig. 2.1. Les signaux

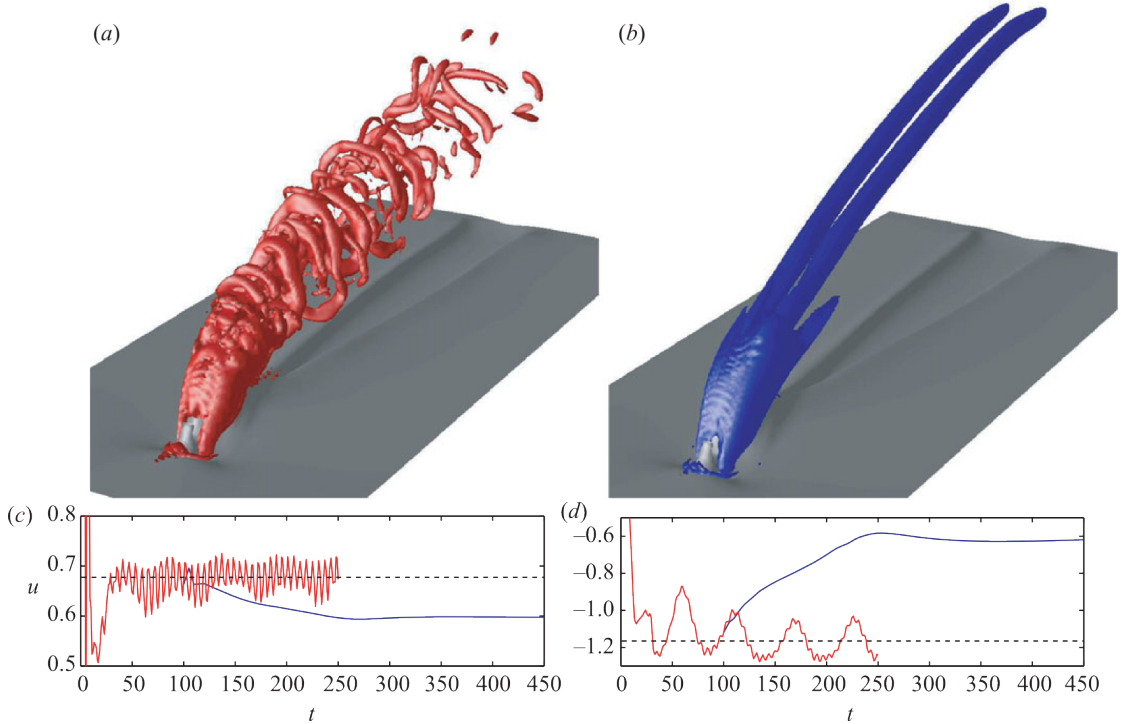


FIGURE 2.1 : Visualisation par le critère  $\lambda_2 = -0.09$  d'un champ de vitesse instantanée issu d'un calcul DNS (a), de l'écoulement de base (b) et des signaux temporels des fluctuations de vitesse axiale mesurées en deux points de l'espace (c) et (d) sur les cas (a) et (b), extrait de Bagheri *et al.* (2009).

temporels des fluctuations de vitesse axiale de l'écoulement instantané (en rouge) et du champ de base (en bleu) sont représentés sur les Fig. 2.1 (c) et (d) pour deux points de l'espace. Les lignes en pointillés correspondent aux valeurs moyennes du calcul DNS. L'écart entre les moyennes temporelles des fluctuations de vitesse axiale et les solutions stationnaires souligne clairement que la solution stationnaire et le champ moyen ne sont donc pas identiques.

Cependant, de par les nombres de Reynolds considérés dans le présent manuscrit, l'approche proposée par Bagheri *et al.* (2009) est malheureusement inenvisageable. De plus, dans le cas des jets, que ce soit dans le cadre des PSE linéaires avec les travaux de Piot *et al.* (2006), Gudmundsson et Colonius (2011) et Brazier *et al.* (2015), ou avec les

PSE non linéaires de [Rodríguez \*et al.\* \(2011\)](#), réaliser une étude de stabilité en utilisant le champ moyen comme champ de base conduit à des résultats satisfaisants, au moins jusqu'en fin de cône potentiel, en les comparant à des mesures. En l'absence d'autres possibilités à l'heure actuelle, le champ moyen calculé par RANS ou par LES sera utilisé comme champ de base pour l'ensemble des cas présentés.

Dans la suite, les jets étudiés sont cylindriques, parfaitement adaptés en pression et ne présentent aucun effet de rotation solide. Ainsi, les hypothèses d'axisymétrie, de vitesse azimutale nulle et de pression uniforme dans tout l'écoulement seront appliquées au champ de base.

#### 2.1.4 Discussion sur l'importance des termes visqueux

De manière générale, l'étude numérique des écoulements turbulents nécessite de satisfaire les équations de Navier-Stokes. En effet, toutes les échelles de la turbulence jouent un rôle précis qu'il conviendrait de prendre en compte. La théorie de Kolmogorov illustre parfaitement ce phénomène. Selon cette théorie, la turbulence procède à un transfert d'énergie cinétique en cascade, partant de l'écoulement moyen vers les grandes échelles de la turbulence, qui elles-mêmes transfèrent de l'énergie cinétique aux plus petites échelles. À très petite échelle, les contraintes visqueuses dissipent l'énergie cinétique sous forme de chaleur. Cette plus petite échelle de la turbulence qu'il est nécessaire de considérer s'appelle l'échelle de Kolmogorov. Ainsi, le fait de supprimer ne serait-ce qu'une échelle de la turbulence altère l'ensemble de la dynamique de l'écoulement.

Dans le cas de notre étude, il a été souligné dans le chapitre 1 que non seulement l'ensemble des échelles de la turbulence joue un rôle sur la dynamique des jets, mais également sur le rayonnement acoustique. Toutefois, cette complexité liée à la turbulence de l'écoulement est traitée en amont de l'analyse de stabilité par la détermination du champ de base. Ici, la modélisation proposée se restreint à étudier l'évolution des fluctuations à grande échelle, convectées par l'écoulement. Or, il a été souligné que ces structures sont la conséquence directe de l'instabilité de Kelvin-Helmholtz dont l'origine est due à l'inertie des fluides. La viscosité ne joue qu'un rôle mineur, conformément aux observations de [Brown et Roshko \(1974\)](#) qui ont noté une faible dépendance des structures cohérentes à grande échelle par rapport au nombre de Reynolds.

De plus, [Piot \*et al.\* \(2006\)](#) et [Léon \(2012\)](#) ont appliqué avec succès une modélisation PSE linéaire basée sur les équations d'Euler linéarisées sur une large gamme de jets à grand nombre de Reynolds  $Re_d \geq 10^5$ , allant des jets subsoniques aux jets supersoniques, froids et chauds. Dans la continuité de ces travaux, sachant que l'ensemble des résultats présentés ici concerne un jet subsonique avec un nombre de Reynolds  $Re_d = 4 \times 10^5$ , les effets visqueux seront négligés dans la présente modélisation. Toutefois, la prise en

compte des interactions non linéaires entre ondes d'instabilité peut rendre ce choix discutable et il pourra éventuellement être reconsidéré dans des travaux futurs.

### 2.1.5 Les équations d'Euler perturbées

La discussion ci-dessus vis-à-vis de la contribution des termes visqueux permet de considérer les équations d'Euler pour modéliser l'évolution des perturbations à grande échelle :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (2.19a)$$

$$\frac{\partial (\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = -\nabla p \quad (2.19b)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \nabla S \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.19c)$$

Les équations d'Euler perturbées sont alors obtenues après l'application de la technique des perturbations (1.15) et la simplification des termes de l'écoulement de base :

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \bar{\rho} (\nabla \cdot \mathbf{u}') + (\mathbf{u}' \cdot \nabla \bar{\rho}) + \rho' (\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}) + (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \rho') = TNL^{(1)} \quad (2.20a)$$

$$\bar{\rho} \left[ \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} + (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \mathbf{u}' + (\mathbf{u}' \cdot \nabla) \bar{\mathbf{u}} \right] + \nabla p' = \mathbf{TNL}^{(2,3,4)} \quad (2.20b)$$

$$\frac{\partial S'}{\partial t} + \nabla \bar{S} \cdot \mathbf{u}' + \nabla S' \cdot \bar{\mathbf{u}} = TNL^{(5)} \quad (2.20c)$$

Les termes  $TNL^{(i)}$ , développés dans les équations (2.21), regroupent quant à eux les Termes Non Linéaires issus des produits doubles et triples des perturbations :

$$TNL^{(1)} = -\rho' (\nabla \cdot \mathbf{u}') - (\mathbf{u}' \cdot \nabla \rho') \quad (2.21a)$$

$$\mathbf{TNL}^{(2,3,4)} = -\bar{\rho} (\mathbf{u}' \cdot \nabla) \mathbf{u}' - \rho' \left[ \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} + (\mathbf{u}' \cdot \nabla) \bar{\mathbf{u}} + (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \mathbf{u}' + (\mathbf{u}' \cdot \nabla) \mathbf{u}' \right] \quad (2.21b)$$

$$TNL^{(5)} = -\nabla S' \cdot \mathbf{u}' \quad (2.21c)$$

avec  $\bar{S} = C_v \ln \left( \frac{\bar{p}}{\bar{\rho}^\gamma} \right)$  et  $S' = C_v \frac{p'}{\bar{p}} - \gamma C_v \frac{p'}{\bar{p}}$  dans la mesure où le fluide se comporte comme un gaz idéal dans la gamme de température et de pression envisagée.

### 2.1.6 Projection des équations perturbées dans le repère cylindrique

Le repère le plus communément utilisé pour l'étude des jets est le repère cylindrique  $(x, r, \theta)$  où l'axe  $\mathbf{e}_x$  coïncide avec l'axe du jet dans la direction de l'écoulement,  $\mathbf{e}_r$  dans la direction radiale et  $\mathbf{e}_\theta$  dans la direction azimutale. Il permet notamment une exploitation aisée des hypothèses d'axisymétrie et de vitesse azimutale nulle pour l'écoulement de base. Les équations des perturbations (2.20) s'expriment alors dans ce repère comme un système de cinq équations à cinq inconnues sur lequel va reposer l'analyse de stabilité

par les équations de stabilité parabolisées (PSE) proposée dans la suite :

$$\begin{aligned} \frac{\bar{d}\rho'}{\bar{d}t} + \bar{\rho} \left( \frac{\partial u'_x}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial (ru'_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u'_\theta}{\partial \theta} \right) \\ + \rho' \left( \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r\bar{u}_r)}{\partial r} \right) \\ + u'_x \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x} + u'_r \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial r} = -TNL^{(1)} \end{aligned} \quad (2.22a)$$

$$\bar{\rho} \left[ \frac{\bar{d}u'_x}{\bar{d}t} + u'_r \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial r} + u'_x \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} \right] + \frac{\partial p'}{\partial x} = -TNL^{(2)} \quad (2.22b)$$

$$\bar{\rho} \left[ \frac{\bar{d}u'_r}{\bar{d}t} + u'_r \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial r} + u'_x \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial x} \right] + \frac{\partial p'}{\partial r} = -TNL^{(3)} \quad (2.22c)$$

$$\bar{\rho} \left[ \frac{\bar{d}u'_\theta}{\bar{d}t} + \frac{u'_\theta \bar{u}_r}{r} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial p'}{\partial \theta} = -TNL^{(4)} \quad (2.22d)$$

$$\bar{\rho} M^2 \frac{\bar{d}p'}{\bar{d}t} - \frac{\bar{d}\rho'}{\bar{d}t} - u'_x \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x} - u'_r \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial r} = -TNL^{(5)} \quad (2.22e)$$

où la dérivée particulière portant sur l'écoulement de base est définie par :

$$\frac{\bar{d}}{\bar{d}t} = \frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}_x \frac{\partial}{\partial x} + \bar{u}_r \frac{\partial}{\partial r} \quad (2.23)$$

avec pour les  $TNL^{(i)}$  les expressions suivantes (2.24) :

$$TNL^{(1)} = u'_x \frac{\partial \rho'}{\partial x} + \rho' \frac{\partial u'_x}{\partial x} + u'_r \frac{\partial \rho'}{\partial r} + \rho' \frac{\partial u'_r}{\partial r} + \frac{u'_r \rho'}{r} + \frac{u'_\theta}{r} \frac{\partial \rho'}{\partial \theta} + \frac{\rho'}{r} \frac{\partial u'_\theta}{\partial \theta} \quad (2.24a)$$

$$\begin{aligned} TNL^{(2)} = \bar{\rho} \left( u'_x \frac{\partial u'_x}{\partial x} + u'_r \frac{\partial u'_x}{\partial r} + \frac{u'_\theta}{r} \frac{\partial u'_x}{\partial \theta} \right) \\ + \rho' \left( \frac{\partial u'_x}{\partial t} + \bar{u}_x \frac{\partial u'_x}{\partial x} + \bar{u}_r \frac{\partial u'_x}{\partial r} + u'_x \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} + u'_r \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial r} \right) \\ + \rho' \left( u'_x \frac{\partial u'_x}{\partial x} + u'_r \frac{\partial u'_x}{\partial r} + \frac{u'_\theta}{r} \frac{\partial u'_x}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \quad (2.24b)$$

$$\begin{aligned} TNL^{(3)} = \bar{\rho} \left( u'_x \frac{\partial u'_r}{\partial x} + u'_r \frac{\partial u'_r}{\partial r} + \frac{u'_\theta}{r} \frac{\partial u'_r}{\partial \theta} - \frac{u'^2_\theta}{r} \right) \\ + \rho' \left( \frac{\partial u'_r}{\partial t} + \bar{u}_x \frac{\partial u'_r}{\partial x} + \bar{u}_r \frac{\partial u'_r}{\partial r} + u'_x \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial x} + u'_r \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial r} \right) \end{aligned} \quad (2.24c)$$

$$+ \rho' \left( u'_x \frac{\partial u'_r}{\partial x} + u'_r \frac{\partial u'_r}{\partial r} + \frac{u'_\theta}{r} \frac{\partial u'_r}{\partial \theta} - \frac{u'^2_\theta}{r} \right)$$

$$\begin{aligned} TNL^{(4)} = & \bar{\rho} \left( u'_x \frac{\partial u'_\theta}{\partial x} + u'_r \frac{\partial u'_\theta}{\partial r} + \frac{u'_\theta}{r} \frac{\partial u'_\theta}{\partial \theta} + \frac{u'_r u'_\theta}{r} \right) \\ & + \rho' \left( \frac{\partial u'_\theta}{\partial t} + \bar{u}_x \frac{\partial u'_\theta}{\partial x} + \bar{u}_r \frac{\partial u'_\theta}{\partial r} + \frac{\bar{u}_r u'_\theta}{r} \right) \\ & + \rho' \left( u'_x \frac{\partial u'_\theta}{\partial x} + u'_r \frac{\partial u'_\theta}{\partial r} + \frac{u'_\theta}{r} \frac{\partial u'_\theta}{\partial \theta} + \frac{u'_r u'_\theta}{r} \right) \end{aligned} \quad (2.24d)$$

$$\begin{aligned} TNL^{(5)} = & \bar{\rho} M_j^2 \left( u'_x \frac{\partial p'}{\partial x} + u'_r \frac{\partial p'}{\partial r} + \frac{u'_\theta}{r} \frac{\partial p'}{\partial \theta} \right) \\ & + \rho' M_j^2 \left( \frac{\partial p'}{\partial t} + \bar{u}_x \frac{\partial p'}{\partial x} + u'_x \frac{\partial p'}{\partial x} + \bar{u}_r \frac{\partial p'}{\partial r} + u'_r \frac{\partial p'}{\partial r} + \frac{u'_\theta}{r} \frac{\partial p'}{\partial \theta} \right) \\ & - u'_x \frac{\partial \rho'}{\partial x} - u'_r \frac{\partial \rho'}{\partial r} - \frac{u'_\theta}{r} \frac{\partial \rho'}{\partial \theta} \\ & - \gamma M_j^2 p' \left( \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \bar{u}_x \frac{\partial \rho'}{\partial x} + u'_x \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x} + u'_x \frac{\partial \rho'}{\partial x} \right) \\ & - \gamma M_j^2 p' \left( \bar{u}_r \frac{\partial \rho'}{\partial r} + u'_r \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial r} + u'_r \frac{\partial \rho'}{\partial r} + \frac{u'_\theta}{r} \frac{\partial \rho'}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \quad (2.24e)$$

## 2.2 Développement des PSE dans un contexte faiblement non linéaire

### 2.2.1 Forme modale des perturbations

Les équations de stabilité parabolisées (PSE) sont utilisées dans le but de prévoir l'évolution des instabilités hydrodynamiques qui se développent dans le champ proche des jets. Concrètement, le vecteur des variables de l'écoulement  $\mathbf{q} = [u_x, u_r, u_\theta, \rho, p]^T$  est défini comme la superposition des vecteurs des variables du champ de base et du champ perturbé de sorte que :

$$\mathbf{q}(x, r, \theta, t) = \bar{\mathbf{q}}(x, r) + \mathbf{q}'(x, r, \theta, t) \quad (2.25)$$

En utilisant l'hypothèse de gaz parfait, les trois composantes de la vitesse, la masse volumique et la pression suffisent pour caractériser l'écoulement.

Bertolotti et Herbert (1991) et Herbert (1994, 1997) proposent alors de modéliser la partie cohérente du champ perturbé en une double somme de modes de Fourier afin de

tenir compte de la symétrie azimutale et de la périodicité en temps des perturbations :

$$\mathbf{q}'(x, r, \theta, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \tilde{\mathbf{q}}_{\mathbf{m},n}(x, r) \exp [i(m\theta - n\omega t)] + \mathbf{q}''(x, r, \theta, t) \quad (2.26)$$

Si cette approche permet de prendre en compte les interactions possibles entre modes, il est important d'insister sur le fait que seule une modélisation de la partie cohérente du champ perturbé est proposée par Bertolotti et Herbert (1991) et Herbert (1994, 1997). En effet, au même titre que les effets visqueux, les fluctuations incohérentes assimilées aux petites échelles de la turbulence, modélisées par le terme  $\mathbf{q}''$ , sont supposées avoir des échelles spatiales et temporelles suffisamment séparées des grandes échelles turbulentes pour pouvoir les négliger. Toutefois, bien qu'inexploitée dans le présent manuscrit, une étude récente réalisée par Towne *et al.* (2015) suggère que la prise en compte des interactions entre les structures cohérentes et la turbulence d'arrière-plan, sous la forme d'un terme source, serait nécessaire pour pallier l'incapacité des modèles de stabilité linéaire à reproduire le rayonnement acoustique des jets subsoniques froids.

De façon similaire à la méthode des échelles multiples, une nouvelle échelle de variation  $s$  est ensuite introduite afin de considérer les faibles variations des caractéristiques de l'écoulement de base dans la direction axiale. Finalement, on sépare formellement la fonction modale  $\tilde{\mathbf{q}}_{\mathbf{m},n}$  en un terme d'amplitude  $\hat{\mathbf{q}}_{\mathbf{m},n}$  lentement variable dans la direction axiale et un terme ondulatoire rapide  $\mathcal{A}_{m,n}$  pour chaque mode de Fourier, de sorte que :

$$\tilde{\mathbf{q}}_{\mathbf{m},n}(x, r) = \hat{\mathbf{q}}_{\mathbf{m},n}(s, r) \mathcal{A}_{m,n}(x) = \hat{\mathbf{q}}_{\mathbf{m},n}(s, r) \gamma_{m,n} \exp \left[ i \int_{x_0}^x \alpha_{m,n}(\xi) d\xi \right] \quad (2.27)$$

$$\text{avec } \gamma_{m,n} = \varepsilon_{m,n} \exp(i \phi_{m,n}) \quad (2.28)$$

où  $\alpha_{m,n}$  est le nombre d'onde axial du mode  $(m, n)$  et  $x_0$  la position axiale initiale.  $\varepsilon_{m,n}$  correspond au maximum d'amplitude de la perturbation de vitesse axiale  $\hat{u}_{x_{m,n}}$  en  $x_0$ . Ce maximum se produit à un certain rayon où la phase initiale  $\phi_{m,n}$  est définie.

### 2.2.2 Discussion sur les modes stationnaires

Il est important de souligner que les interactions non linéaires entre les ondes d'instabilité peuvent produire des modes à fréquence nulle ( $n = 0$ ), représentant une perturbation stationnaire du champ de base. Pour les jets laminaires faiblement forcés, Salgado *et al.* (2010b) ont remarqué que la prise en compte des modes stationnaires n'altère pas le comportement des autres modes. En revanche, lorsque les non-linéarités ont un effet significatif sur un grand nombre de modes, la déformation du champ moyen devient un élément important. Toutefois, Malik et Chang (2000) ont souligné que cet effet est principalement localisé en aval du cône potentiel. Dans le cas des jets turbulents naturels, les modes stationnaires sont d'ores et déjà pris en compte dans le champ moyen calculé par

RANS ou par LES. D'après [Rodríguez et al. \(2011\)](#), étant donné que le champ moyen est assimilé au champ de base, les calculer une fois de plus avec les PSE serait redondant. Dans ce manuscrit, où l'étude du forçage d'un ou plusieurs modes propres du jet sera abordée, la prise en compte de la déformation du champ moyen pourrait être nécessaire, mais requerrait d'extraire directement le champ de base du calcul LES. Ceci n'a pas été réalisé dans le présent manuscrit mais pourra être reconsidéré dans des travaux futurs.

### 2.2.3 Symétries du problème

Bien que des fréquences négatives ( $n < 0$ ) soient prises en compte dans le formalisme développé dans l'équation (2.26), les perturbations sont à valeur réelle. Ainsi, l'effort de calcul peut être réduit puisque seuls les modes avec  $n \geq 0$  nécessitent d'être résolus. En effet, la nullité de la partie imaginaire de  $\mathbf{q}'$  dans l'équation (2.26) impose la condition suivante :

$$\text{Im}(\mathbf{q}') = 0 \Rightarrow \tilde{\mathbf{q}}_{-\mathbf{m},-\mathbf{n}} = \tilde{\mathbf{q}}_{\mathbf{m},\mathbf{n}}^\dagger \quad (2.29)$$

où l'exposant  $\dagger$  fait référence au complexe conjugué. Cette condition est équivalente à imposer :

$$\hat{\mathbf{q}}_{-\mathbf{m},-\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{q}}_{\mathbf{m},\mathbf{n}}^\dagger, \quad \alpha_{-m,-n} = -\alpha_{m,n}^\dagger \quad \text{et} \quad \phi_{-m,-n} = -\phi_{m,n} \quad (2.30)$$

Dans le cas des jets libres et des jets forcés uniquement sur des modes axisymétriques, aucune direction azimutale n'est a priori privilégiée. Il est alors possible de réduire une fois de plus l'effort de calcul en faisant l'hypothèse que les modes azimutaux se propagent par paires symétriques en azimut, soit :

$$\hat{\mathbf{q}}_{-\mathbf{m},\mathbf{n}} = [\hat{u}_x, \hat{u}_r, -\hat{u}_\theta, \hat{\rho}, \hat{p}]_{m,n}^T \quad (2.31)$$

Toutefois, cette hypothèse doit être levée pour l'étude du forçage d'un jet par un ou plusieurs modes azimutaux.

### 2.2.4 Formulation matricielle du système PSE

La forme modale des perturbations (2.26) est ensuite introduite dans les équations d'Euler perturbées (2.22), avec un développement des termes non linéaires sur cette même base de modes normaux. Ainsi, le vecteur  $\mathbf{TNL}_{\mathbf{m},\mathbf{n}}$  des coefficients de Fourier des termes non linéaires précédemment évoqués dans l'équation (2.24) est défini comme :

$$\mathbf{TNL} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \mathbf{TNL}_{\mathbf{m},\mathbf{n}} \exp i[(m\theta - n\omega t)] \quad (2.32)$$



Finalement, on obtient pour chaque mode  $(m, n)$  un système d'équations linéaires non homogènes portant sur le terme d'amplitude  $\hat{\mathbf{q}}_{\mathbf{m},n}$  lentement variable. Ce système d'équations peut être mis formellement sous forme matricielle :

$$(\mathbf{A}_{\mathbf{m},n} + \mathbf{B}) \cdot \hat{\mathbf{q}}_{\mathbf{m},n} + \mathbf{C} \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{q}}_{\mathbf{m},n}}{\partial x} + \mathbf{D} \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{q}}_{\mathbf{m},n}}{\partial r} = \frac{-\mathbf{TNL}_{\mathbf{m},n}}{\mathcal{A}_{m,n}} \quad (2.33)$$

avec

$$\mathbf{A}_{\mathbf{m},n} = \alpha_{m,n}(x) \mathbf{A}_0 + m \mathbf{A}_1 + n \omega \mathbf{A}_2 \quad (2.34)$$

L'ensemble des matrices  $\mathbf{A}_0$ ,  $\mathbf{A}_1$ ,  $\mathbf{A}_2$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{D}$  sont alors uniquement fonction du champ de base et de ses dérivées axiales et radiales, et restent inchangées d'un mode à un autre. L'expression analytique de ces matrices est explicitée ci-dessous :

$$\mathbf{A}_0 = i \begin{bmatrix} \bar{\rho} & 0 & 0 & \bar{u}_x & 0 \\ \bar{\rho} \bar{u}_x & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \bar{\rho} \bar{u}_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\rho} \bar{u}_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\bar{u}_x & \bar{\rho} \bar{u}_x M_j^2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_1 = \frac{i}{r} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \bar{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = -i \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \bar{\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\rho} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \bar{\rho} M_j^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x} & \frac{\bar{\rho}}{r} + \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial r} & 0 & \frac{\bar{u}_r}{r} + \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial r} & 0 \\ \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x} \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} & \frac{\bar{\rho}}{\partial x} \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial r} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x} \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial x} & \frac{\bar{\rho}}{\partial x} \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial r} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x} & \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\bar{\rho} \bar{u}_r}{r} & 0 & 0 \\ -\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x} & -\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial r} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \bar{\rho} & 0 & 0 & \bar{u}_x & 0 \\ \bar{\rho} \bar{u}_x & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \bar{\rho} \bar{u}_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\rho} \bar{u}_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\bar{u}_x & \bar{\rho} \bar{u}_x M_j^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & \bar{\rho} & 0 & \bar{u}_r & 0 \\ \bar{\rho} \bar{u}_r & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\rho} \bar{u}_r & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \bar{\rho} \bar{u}_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\bar{u}_r & \bar{\rho} \bar{u}_r M_j^2 \end{bmatrix}$$

Par souci de clarté, le système d'équations (2.33) sera appelé système PSE, bien que contrairement au système PSE originel de Bertolotti et Herbert (1991) et Herbert (1994, 1997), il soit déterminé à partir des équations d'Euler au lieu des équations de Navier-Stokes.

### 2.2.5 Nature du système PSE

Le système (2.33), sans la condition de normalisation, est appelé système PSE pour Équations de Stabilité Parabolisées. Il est alors tout à fait logique de s'interroger quant à la nature du système obtenu. En réalisant une étude des caractéristiques du système PSE linéaire, Haj-Hariri (1994) a montré que ce dernier présente une faible ellipticité d'origine acoustique. Numériquement, l'ellipticité des équations est facilement observable par l'utilisation d'un faible pas axial qui conduit à des instabilités numériques. Haj-Hariri (1994) propose alors de supprimer le terme responsable de cette ellipticité, le terme  $\partial \hat{p}_{m,n} / \partial x$  dans l'équation de quantité de mouvement axiale. Si de prime abord ce choix peut paraître surprenant, il est important de remarquer que le gradient de la perturbation de pression physique est  $i\alpha_{m,n} \hat{p}_{m,n} + \partial \hat{p}_{m,n} / \partial x$  où le second terme est relativement faible de par la lente variation axiale des termes d'amplitude. Le fait de le supprimer permet de conserver quand même une partie significative du gradient de pression physique.

Un choix alternatif consiste à utiliser un incrément axial  $\Delta x$  suffisamment grand pour filtrer artificiellement l'influence des perturbations qui remontent l'écoulement. Li et Malik (1996) ont montré que pour un schéma d'ordre 1 dans la direction axiale, une condition suffisante est :

$$\Delta x > \frac{1}{|\text{Re}(\alpha_{m,n})|} \quad (2.35)$$

Toutefois, bien que cette limite reste acceptable dans la plupart des applications, elle ne permet pas de résoudre les variations rapides des termes non linéaires qui peuvent apparaître localement.

Dans le but de limiter l'incrément axial  $\Delta x$ , tout en conservant une majeure partie du gradient de la perturbation de pression, un nouveau critère a été développé en s'inspirant de ce qui a été réalisé par Vigneron *et al.* (1978) pour l'étude de la couche limite en écoulement supersonique. Dans le cas des équations de Navier-Stokes Parabolisées

(PNS), ces auteurs proposent de séparer formellement le terme  $\partial \hat{p}_{m,n}/\partial x$  en deux composantes :

$$\frac{\partial \hat{p}_{m,n}}{\partial x} = w \frac{\partial \hat{p}_{m,n}}{\partial x} + (1 - w) \frac{\partial \hat{p}_{m,n}}{\partial x} \quad (2.36)$$

où  $w$  correspond à la fraction de  $\partial \hat{p}_{m,n}/\partial x$  qu'il est possible de conserver pour garantir la parabolicité des équations. Le terme  $(1 - w) \partial \hat{p}_{m,n}/\partial x$  est quant à lui reporté dans le terme source, ou négligé comme dans le cas présent. En injectant ce formalisme dans le système d'équations (2.33), la méthode des caractéristiques permet d'obtenir deux conditions pour garantir la parabolicité du système :

$$\begin{cases} \bar{\rho} M^2 \bar{u}_r^2 < 1 \\ w \leq \frac{\bar{\rho} M^2 \bar{u}_x^2}{1 - \bar{\rho} M^2 \bar{u}_r^2} \end{cases} \quad (2.37)$$

La première condition impose d'avoir une vitesse radiale du champ de base  $\bar{u}_r$  suffisamment petite, ce qui restreint l'utilisation des PSE au cas des jets faiblement divergents. La seconde indique la fraction maximum  $w$  de  $\partial \hat{p}/\partial x$  qui peut être retenue dans les équations. À noter que l'effet de  $\partial \hat{p}/\partial x$  est complètement négligé dans le cas des jets incompressibles, où  $w(M = 0) = 0$ , puis est introduit progressivement au fur et à mesure que les effets de compressibilité augmentent. En pratique,  $w$  est évalué de la façon suivante :

$$w = \min \left[ 1, \frac{\bar{\rho} M^2 \bar{u}_x^2}{1 - \bar{\rho} M^2 \bar{u}_r^2} \right] \quad (2.38)$$

Le système PSE ainsi formulé est parabolique et peut être résolu par une simple méthode de marche en  $x$ .

Dans un contexte non linéaire, la nature du système peut être altérée par l'apparition du terme de forçage. Toutefois, ce critère a été appliqué sur un grand nombre de configurations sans jamais générer d'instabilités numériques. En revanche, la parabolicité des équations peut être remise en question par l'introduction de la condition de normalisation présentée ci-après. En effet, même en linéaire, des instabilités numériques apparaissent dès lors que l'incrément axial  $\Delta x$  devient trop faible, généralement pour  $\Delta x < 0.05$  pour les applications présentées dans ce manuscrit.

## 2.2.6 Condition de normalisation

Dans le cas où les nombres d'onde axiaux  $\alpha_{m,n}$  sont connus, le système PSE (2.33) permet de déterminer les fonctions d'amplitude  $\hat{\mathbf{q}}_{\mathbf{m},\mathbf{n}}$ . En stabilité locale, comme on l'a vu dans le chapitre 1.4,  $\alpha_{m,n}$  est déterminé pour chaque mode  $(m, n)$  par une relation de dispersion. Avec les PSE, il n'est malheureusement pas possible de réduire le système à un problème aux valeurs propres dans le but d'obtenir cette fameuse relation de dispersion. De plus, bien que la décomposition des perturbations en un terme d'amplitude  $\hat{\mathbf{q}}_{\mathbf{m},\mathbf{n}}$

lentement variable et un terme d'ondulation  $\mathcal{A}_{m,n}$  rapide ait permis de simplifier les équations, aucune condition n'a été invoquée pour assurer cette décomposition.

Bertolotti et Herbert (1991) et Herbert (1994, 1997) ont alors proposé pour chaque mode  $(m, n)$  d'ajouter une équation scalaire pour à la fois fermer le problème et lever l'ambiguïté concernant les dépendances en  $x$  de  $\hat{\mathbf{q}}_{\mathbf{m},n}$  et  $\mathcal{A}_{m,n}$ . À partir de la décomposition modale adoptée en stabilité locale, le nombre d'onde axial  $\alpha_{m,n}$  peut directement être obtenu par :

$$\alpha_{m,n} = -i \frac{\partial \ln(\mathbf{q}')}{\partial x} = -i \frac{1}{\mathbf{q}'} \frac{\partial \mathbf{q}'}{\partial x} \quad (2.39)$$

Une démarche similaire peut être menée dans le cas des PSE. À noter qu'une relation de fermeture est nécessaire pour chaque mode traité individuellement. La décomposition modale des perturbations prend alors la forme suivante :

$$\mathbf{q}'(x, r, \theta, t) = \hat{\mathbf{q}}_{\mathbf{m},n}(x, r) \exp \left[ i \left( \int_{x_0}^x \alpha_{m,n}(\xi) d\xi + m\theta - n\omega t \right) \right] \quad (2.40)$$

En appliquant le formalisme développé dans l'équation (2.39), un nombre d'onde local  $\tilde{\alpha}_{m,n}$  peut être défini par :

$$\tilde{\alpha}_{m,n}(x, r) = -i \frac{\partial \ln(\mathbf{q}')}{\partial x} = \alpha_{m,n}(x) - i \frac{1}{\hat{\mathbf{q}}_{\mathbf{m},n}} \frac{\partial \hat{\mathbf{q}}_{\mathbf{m},n}}{\partial x} \quad (2.41)$$

À partir de cette équation (2.41), il est possible de noter que les variations axiales de la perturbation physique sont réparties suivant deux composantes. Une partie des fluctuations axiales est absorbée par la fonction de phase à travers  $\alpha_{m,n}$ . Les fluctuations restantes sont quant à elles absorbées par la fonction d'amplitude via le terme  $(i/\hat{\mathbf{q}}_{\mathbf{m},n}) \cdot \partial \hat{\mathbf{q}}_{\mathbf{m},n} / \partial x$ . De plus,  $\tilde{\alpha}_{m,n}$  dépend désormais de la direction radiale  $r$ . Pour avoir une grandeur comparable à celle obtenue par la stabilité locale, et donc indépendante de la direction radiale  $r$ , Airiau (1994) propose de multiplier cette équation par  $\hat{\mathbf{q}}_{\mathbf{m},n}^\dagger \hat{\mathbf{q}}_{\mathbf{m},n}$ , d'intégrer dans la direction radiale  $r$  et de diviser par l'intégrale de  $\hat{\mathbf{q}}_{\mathbf{m},n}^\dagger \hat{\mathbf{q}}_{\mathbf{m},n}$  :

$$\frac{\int_0^\infty \tilde{\alpha}_{m,n} \hat{\mathbf{q}}_{\mathbf{m},n}^\dagger \hat{\mathbf{q}}_{\mathbf{m},n} dr}{\int_0^\infty \hat{\mathbf{q}}_{\mathbf{m},n}^\dagger \hat{\mathbf{q}}_{\mathbf{m},n} dr} = \alpha_{m,n}(x) - i \frac{\int_0^\infty \hat{\mathbf{q}}_{\mathbf{m},n}^\dagger (\partial \hat{\mathbf{q}}_{\mathbf{m},n} / \partial x) dr}{\int_0^\infty \hat{\mathbf{q}}_{\mathbf{m},n}^\dagger \hat{\mathbf{q}}_{\mathbf{m},n} dr} \quad (2.42)$$

Pour assurer que la majeure partie des fluctuations axiales soit contenue dans le terme de phase à travers  $\alpha_{m,n}$ , la condition de normalisation  $N_{m,n}$  est finalement définie par :

$$N_{m,n} = \int_0^\infty \hat{\mathbf{q}}_{\mathbf{m},n}^\dagger \frac{\partial \hat{\mathbf{q}}_{\mathbf{m},n}}{\partial x} dr = 0 \quad (2.43)$$

De façon plus synthétique, l'équation (2.42) peut être réécrite sous la forme :

$$\alpha_{m,n}^* = \alpha_{m,n}(x) - i \frac{N_{m,n}}{A_{m,n}^2} \quad (2.44)$$

avec  $\alpha_{m,n}^*$  le nombre d'onde axial recherché,  $N_{m,n}$  la condition de normalisation et  $A_{m,n}$  l'amplitude associée à la perturbation choisie. En effet, le choix de la formulation retenue pour l'amplitude des perturbations est arbitraire. Une revue de plusieurs définitions possibles pour les perturbations, et des conditions de normalisation associées, a été réalisée par Airiau (1994). À chaque définition correspond un nombre d'onde axial  $\alpha_{m,n}^*$  différent. Toutefois, ce choix entraîne uniquement une modification de la répartition de l'énergie entre  $\hat{\mathbf{q}}_{\mathbf{m},\mathbf{n}}$  et  $\mathcal{A}_{m,n}$ , sans pour autant altérer la perturbation physique  $\mathbf{q}'$ .

Dans le cas présent, les fonctions d'amplitude associées aux trois composantes de la vitesse ont été retenues dans le but de considérer l'énergie cinétique des perturbations :

$$N_{m,n} = \int_0^\infty \left( \hat{u}_{x_{m,n}}^\dagger \frac{\partial \hat{u}_{x_{m,n}}}{\partial x} + \hat{u}_{r_{m,n}}^\dagger \frac{\partial \hat{u}_{r_{m,n}}}{\partial x} + \hat{u}_{\theta_{m,n}}^\dagger \frac{\partial \hat{u}_{\theta_{m,n}}}{\partial x} \right) dr = 0 \quad (2.45)$$

Cette condition est donc appliquée individuellement pour chaque mode  $(m, n)$ , en itérant sur l'équation (2.44) jusqu'à convergence de  $\alpha_{m,n}^*$ , atteinte quand  $N_{m,n} = 0$ .

### 2.2.7 Conditions initiales

L'analyse de la nature du système PSE a permis de montrer qu'une simple méthode de marche dans la direction axiale de l'écoulement était suffisante pour le résoudre. Ainsi, seules des conditions initiales à la station  $x_0$  sont requises. Précisément, ces conditions sont le nombre d'onde axial  $\alpha_{m,n}$ , les fonctions d'amplitudes  $\hat{\mathbf{q}}_{\mathbf{m},\mathbf{n}}$ , les amplitudes initiales  $\varepsilon_{m,n}$  et les phases initiales  $\phi_{m,n}$  de tous les modes considérés.

Pour la détermination de chaque  $\alpha_{m,n}$  et  $\hat{\mathbf{q}}_{\mathbf{m},\mathbf{n}}$ , deux possibilités peuvent être envisagées. La première consiste à négliger les effets non parallèles à la station initiale et à extraire la solution de la stabilité locale. Cette théorie, introduite préalablement dans le chapitre 1.4, consiste à supposer un écoulement parallèle. L'écoulement de base est ainsi mis sous la forme :

$$\bar{\mathbf{q}} = \bar{\mathbf{q}}(r) \quad (2.46)$$

Les perturbations, quant à elles, sont développées sur une base de mode normaux :

$$\mathbf{q}'(x, r, \theta, t) = \hat{\mathbf{q}}(r) e^{i(\alpha x + m\theta - n\omega t)} \quad (2.47)$$

L'introduction de ce formalisme dans les équations d'Euler linéarisées conduit à un système comparable à celui des PSE, qui mis sous forme matricielle se réduit à :

$$(\mathbf{A}_{\mathbf{m},\mathbf{n}} + \mathbf{B}) \cdot \hat{\mathbf{q}}_{\mathbf{m},\mathbf{n}} + \mathbf{D} \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{q}}_{\mathbf{m},\mathbf{n}}}{\partial r} = 0 \quad (2.48)$$

avec

$$\mathbf{A}_{\mathbf{m},\mathbf{n}} = \alpha_{m,n}(x)\mathbf{A}_0 + m\mathbf{A}_1 + n\omega\mathbf{A}_2 \quad (2.49)$$

Ici, les matrices  $\mathbf{A}_0$ ,  $\mathbf{A}_1$ ,  $\mathbf{A}_2$ ,  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{D}$  sont uniquement fonction du champ de base et de ses dérivées radiales avec pour expression analytique :

$$\mathbf{A}_0 = i \begin{bmatrix} \bar{\rho} & 0 & 0 & \bar{u}_x & 0 \\ \bar{\rho} \bar{u}_x & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \bar{\rho} \bar{u}_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\rho} \bar{u}_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\bar{u}_x & \bar{\rho} \bar{u}_x M_j^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_1 = \frac{i}{r} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \bar{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_2 = -i \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \bar{\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\rho} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \bar{\rho} M_j^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\bar{\rho}}{r} + \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\rho} \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial r} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & \bar{\rho} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ainsi, la détermination du nombre d'onde axial  $\alpha_{m,n}$ , correspondant au mode hydrodynamique instable de Kelvin-Helmholtz, est obtenue via la résolution du problème aux valeurs propres. Bien qu'une famille de valeurs propres soit extraite, le mode de Kelvin-Helmholtz est facilement identifiable pour tout  $n \geq 0$  avec une partie réelle positive  $\text{Re}(\alpha_{m,n}) > 0$  et une partie imaginaire négative  $\text{Im}(\alpha_{m,n}) < 0$ . À cette valeur propre  $\alpha_{m,n}$  est associé le vecteur propre  $\hat{\mathbf{q}}_{\mathbf{m},\mathbf{n}}$  recherché pour l'initialisation.

Dans le but de garder une certaine cohérence avec l'approche PSE, dont l'intérêt majeur porte sur la prise en compte de la faible divergence du jet, une deuxième possibilité consiste à utiliser une approche locale non parallèle pour déterminer le couple  $(\alpha_{m,n}, \hat{\mathbf{q}}_{\mathbf{m},\mathbf{n}})$ . Cette démarche est celle adoptée par Bertolotti *et al.* (1992). En effet, afin d'assurer la convergence du problème, la condition initiale à appliquer doit être la plus représentative possible de la solution réelle. Toutefois, comme souligné par Airiau (1994) et Léon (2012), la solution parallèle est généralement amplement suffisante. Une légère phase transitoire est certes visible sur les premières stations mais n'altère en rien la convergence du calcul. L'approche locale parallèle est donc celle adoptée dans ce manuscrit.

Contrairement à un calcul de stabilité linéaire où les amplitudes  $\varepsilon_{m,n}$  et les phases  $\phi_{m,n}$  initiales des modes n'ont pas d'importance, elles sont fondamentales dans un contexte non linéaire. En effet, comme souligné par Rodríguez *et al.* (2011), les effets non linéaires couplent l'évolution de tous les modes. La seule possibilité pour extraire ces

valeurs est de réaliser une décomposition azimutale des signaux temporels issus d'une mesure ou d'une simulation numérique. Une analyse détaillée concernant l'extraction des amplitudes des modes azimutaux sur une configuration de jet réel sera présentée dans le chapitre 3.

Il est important de souligner une fois de plus que l'ensemble du processus d'initialisation présenté ci-dessus doit être effectué pour tous les modes considérés dans les séries de Fourier. Pour l'étude des jets laminares, certains modes dits principaux ont une amplitude initiale bien supérieure aux autres. Seuls ces modes sont initialisés à la station  $x_0$ . Au fur et à mesure de l'évolution axiale de ces modes, les interactions modales peuvent amplifier par non-linéarité des modes initialement négligeables qu'il convient désormais de prendre en compte, les modes résonants. Ainsi, Day *et al.* (2001) proposent à chaque station axiale d'évaluer l'amplitude des modes résonants. Pour cela, les nombres d'onde axiaux  $\alpha_{m,n}$  des modes en question sont utilisés pour résoudre le système PSE non linéaire où les dérivées axiales ont été négligées :

$$(\mathbf{A}_{\mathbf{m},n} + \mathbf{B}) \cdot \hat{\mathbf{q}}_{\mathbf{m},n} + \mathbf{D} \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{q}}_{\mathbf{m},n}}{\partial r} = -\mathbf{T}\mathbf{N}\mathbf{L}_{\mathbf{m},n} \quad (2.50)$$

À noter que les  $\alpha_{m,n}$  des modes résonants sont obtenus préalablement par un calcul PSE linéaire. Si l'amplitude d'un ou plusieurs des vecteurs propres  $\hat{\mathbf{q}}_{\mathbf{m},n}$  est supérieure à une certaine valeur seuil, ces modes sont supposés significatifs et intégrés au calcul au même titre que les modes principaux. En revanche, les modes dont l'amplitude n'est pas suffisante ne sont pas considérés.

Toutefois, Rodríguez *et al.* (2011) soulignent que dans le cas des jets turbulents, où le contenu spectral des perturbations est très étendu, l'ordre de grandeur des amplitudes initiales est quasiment le même pour l'ensemble des modes. Tous les modes sont alors définis à la station initiale  $x_0$  du calcul.

### 2.2.8 Conditions aux limites sur l'axe

Le fait d'utiliser un repère cylindrique génère des termes en  $1/r$  dans le système PSE. Une singularité apparaît alors sur l'axe, en  $r = 0$ , qu'il est nécessaire de traiter. Dans un contexte linéaire, Léon (2012) montre que cette singularité est restreinte aux équations de continuité et de quantité de mouvement dans la direction azimutale. En multipliant ces équations par  $r$  et en prenant la limite en  $r \rightarrow 0$ , de nouvelles conditions sont obtenues en fonction du nombre d'onde azimutal  $m$ . Toutefois, avec la prise en compte des termes non linéaires, toutes les équations présentent désormais une singularité sur l'axe, ce qui ne permet plus d'exploiter ces conditions. Khorrami *et al.* (1989) proposent d'imposer :

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial \mathbf{q}'_{\mathbf{m},n}}{\partial \theta} = 0 \quad (2.51)$$

pour que toutes les quantités physiques soient lisses et bornées sur l'axe. Soit,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial \mathbf{u}'_{m,n}}{\partial \theta} = im u'_{x_{m,n}} \mathbf{e}_x + (im u'_{r_{m,n}} - u'_{\theta_{m,n}}) \mathbf{e}_r + (im u'_{\theta_{m,n}} + u'_{r_{m,n}}) \mathbf{e}_\theta \quad (2.52)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial p'_{m,n}}{\partial \theta} = im p'_{m,n} \quad (2.53)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial \rho'_{m,n}}{\partial \theta} = im \rho'_{m,n} \quad (2.54)$$

$$\text{de sorte que } \begin{cases} \hat{u}_{r_{m,n}} = \hat{u}_{\theta_{m,n}} = 0 & : \text{ pour } m = 0 \\ \hat{u}_{x_{m,n}} = \hat{\rho}_{m,n} = \hat{p}_{m,n} = 0 & : \text{ pour } |m| = 1 \\ \hat{u}_{x_{m,n}} = \hat{u}_{r_{m,n}} = \hat{u}_{\theta_{m,n}} = \hat{\rho}_{m,n} = \hat{p}_{m,n} = 0 & : \text{ pour } |m| \geq 2 \end{cases} \quad (2.55)$$

Pour  $m = 0$ , il manque trois conditions. Pour  $|m| = 1$ , deux équations deviennent linéairement dépendantes, une équation supplémentaire est donc nécessaire. Il est toutefois possible de lever cette indétermination en considérant le repère cartésien  $(x, y, z)$  et en imposant :

$$\lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \theta = 0}} \frac{\partial \mathbf{q}'_{m,n}}{\partial y} = \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \theta = \pi}} \frac{\partial \mathbf{q}'_{m,n}}{\partial y} \quad (2.56)$$

Ainsi, en  $\theta = 0$  :  $\partial/\partial y = \partial/\partial r$ ,  $\mathbf{e}_r = \mathbf{e}_y$ ,  $\mathbf{e}_\theta = \mathbf{e}_z$  donc

$$\lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \theta = 0}} \frac{\partial \mathbf{u}'_{m,n}}{\partial y} = \left[ \frac{\partial \hat{u}_{x_{m,n}}}{\partial r} \mathbf{e}_x + \frac{\partial \hat{u}_{r_{m,n}}}{\partial r} \mathbf{e}_y + \frac{\partial \hat{u}_{\theta_{m,n}}}{\partial r} \mathbf{e}_z \right] \exp(im0) \quad (2.57)$$

$$\lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \theta = 0}} \frac{\partial p'_{m,n}}{\partial y} = \frac{\partial \hat{p}_{m,n}}{\partial r} \exp(im0) \quad (2.58)$$

$$\lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \theta = 0}} \frac{\partial \rho'_{m,n}}{\partial y} = \frac{\partial \hat{\rho}_{m,n}}{\partial r} \exp(im0) \quad (2.59)$$

et en  $\theta = \pi$  :  $\partial/\partial y = -\partial/\partial r$ ,  $\mathbf{e}_r = -\mathbf{e}_y$ ,  $\mathbf{e}_\theta = -\mathbf{e}_z$  donc

$$\lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \theta = \pi}} \frac{\partial \mathbf{u}'_{m,n}}{\partial y} = \left[ -\frac{\partial \hat{u}_{x_{m,n}}}{\partial r} \mathbf{e}_x - \frac{\partial \hat{u}_{r_{m,n}}}{\partial r} (-\mathbf{e}_y) - \frac{\partial \hat{u}_{\theta_{m,n}}}{\partial r} (-\mathbf{e}_z) \right] \exp(im\pi) \quad (2.60)$$

$$\lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \theta = \pi}} \frac{\partial p'_{m,n}}{\partial y} = -\frac{\partial \hat{p}_{m,n}}{\partial r} \exp(im\pi) \quad (2.61)$$

$$\lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \theta = \pi}} \frac{\partial \rho'_{m,n}}{\partial y} = -\frac{\partial \hat{\rho}_{m,n}}{\partial r} \exp(im\pi) \quad (2.62)$$

$$\text{de sorte que } \begin{cases} \frac{\partial \hat{u}_{x_{m,n}}}{\partial r} = \frac{\partial \hat{\rho}_{m,n}}{\partial r} = \frac{\partial \hat{p}_{m,n}}{\partial r} = 0 & : \text{ pour } m = 0 \\ \frac{\partial \hat{u}_{r_{m,n}}}{\partial r} = \frac{\partial \hat{u}_{\theta_{m,n}}}{\partial r} = 0 & : \text{ pour } |m| = 1 \end{cases} \quad (2.63)$$



Finalement, les conditions suivantes sont appliquées sur l'axe :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \hat{u}_{x_{m,n}}}{\partial r} = \hat{u}_{r_{m,n}} = \hat{u}_{\theta_{m,n}} = \frac{\partial \hat{\rho}_{m,n}}{\partial r} = \frac{\partial \hat{p}_{m,n}}{\partial r} = 0 \quad : \quad \text{pour } m = 0 \\ \hat{u}_{x_{m,n}} = \frac{\partial \hat{u}_{r_{m,n}}}{\partial r} = \frac{\partial \hat{u}_{\theta_{m,n}}}{\partial r} = \hat{\rho}_{m,n} = \hat{p}_{m,n} = 0 \quad : \quad \text{pour } |m| = 1 \\ \hat{u}_{x_{m,n}} = \hat{u}_{r_{m,n}} = \hat{u}_{\theta_{m,n}} = \hat{\rho}_{m,n} = \hat{p}_{m,n} = 0 \quad : \quad \text{pour } |m| \geq 2 \end{array} \right. \quad (2.64)$$

### 2.2.9 Conditions aux limites en champ lointain

En champ lointain, le système PSE (2.33) peut être simplifié en considérant le milieu ambiant au repos, soit  $\bar{u}_x = \bar{u}_r = \bar{u}_\theta = 0$ , et en supposant l'effet des termes non linéaires négligeable :

$$i\bar{\rho}\alpha_{m,n}\hat{u}_{x_{m,n}} + \frac{\bar{\rho}}{r}\hat{u}_{r_{m,n}} + \frac{im\bar{\rho}}{r}\hat{u}_{\theta_{m,n}} - in\omega\hat{\rho}_{m,n} + \bar{\rho}\left(\frac{\partial \hat{u}_{x_{m,n}}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{u}_{r_{m,n}}}{\partial r}\right) = 0 \quad (2.65a)$$

$$-in\omega\bar{\rho}\hat{u}_{x_{m,n}} + i\alpha_{m,n}\hat{p}_{m,n} + \frac{\partial \hat{p}_{m,n}}{\partial x} = 0 \quad (2.65b)$$

$$-in\omega\bar{\rho}\hat{u}_{r_{m,n}} + \frac{\partial \hat{p}_{m,n}}{\partial r} = 0 \quad (2.65c)$$

$$-in\omega\bar{\rho}\hat{u}_{\theta_{m,n}} + \frac{im}{r}\hat{p}_{m,n} = 0 \quad (2.65d)$$

$$in\omega\hat{\rho}_{m,n} - in\omega\bar{\rho}M_j^2\hat{p}_{m,n} = 0 \quad (2.65e)$$

Pour résoudre ce système, une approche classique consiste à utiliser une condition de non réflexion sur cette frontière comme celle de [Thompson \(1987\)](#) basée sur la méthode des caractéristiques. [Piot et al. \(2006\)](#) et [Léon \(2012\)](#) proposent une approche différente qui consiste à simplifier davantage les équations précédentes en considérant comme négligeables les variations axiales des termes d'amplitudes en champ lointain, soit  $\partial \hat{p}_{m,n}/\partial x$  et  $\partial \hat{u}_{x_{m,n}}/\partial x$ . Si pour le terme  $\partial \hat{p}_{m,n}/\partial x$  cette hypothèse semble convenable au vu de la discussion apportée sur la parabolicité des équations, pour le terme  $\partial \hat{u}_{x_{m,n}}/\partial x$  elle reste discutable. Toutefois, [Piot et al. \(2006\)](#) et [Léon \(2012\)](#) soulignent que les résultats obtenus avec cette méthode sont similaires à ceux issus de méthodes plus complexes. Cette hypothèse sera donc exploitée, ce qui permet de réécrire le système sous la forme d'une équation différentielle homogène d'ordre deux pour  $\hat{p}_{m,n}$  :

$$\frac{\partial^2 \hat{p}_{m,n}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{p}_{m,n}}{\partial r} + \left( \bar{\rho} n^2 \omega^2 M_j^2 - \frac{m^2}{r^2} - \alpha_{m,n}^2 \right) \hat{p}_{m,n} = 0 \quad (2.66)$$

La solution de cette équation est une combinaison linéaire des fonctions de Hankel  $H_m^{(1)}$  et  $H_m^{(2)}$  où seule la solution asymptotiquement décroissante radialement est physiquement acceptable. Ainsi, loin du jet,  $\hat{p}_{m,n}$  prend la forme d'une fonction de Hankel du premier type d'ordre  $m$  :

$$\hat{p}_{m,n} = H_m^{(1)}(i\lambda_{m,n}r) \quad (2.67)$$

avec  $\lambda_{m,n}^2 = \alpha_{m,n}^2 - \bar{\rho} n^2 \omega^2 M_j^2$  tel que  $\text{Re}(\lambda_{m,n}) > 0$ .

Finalement, en s'appuyant sur le comportement asymptotique de  $H_m^{(1)}$  en champ lointain, la relation suivante est appliquée sur la frontière :

$$\frac{\partial \hat{p}_{m,n}}{\partial r} + \left( \lambda_{m,n} + \frac{1}{2r} \right) \hat{p}_{m,n} = 0 \quad (2.68)$$

## 2.3 Résolution du système PSE non linéaire

### 2.3.1 Discrétisation du domaine de calcul

La résolution numérique du système PSE complet nécessite de prendre en compte le système des équations de stabilité parabolisées (2.33), la condition de normalisation (2.45), les conditions initiales  $(\alpha_{0,m,n}, \hat{\mathbf{q}}_{0,m,n})$  en  $x_0$ , les amplitudes initiales  $\varepsilon_{m,n}$  et les conditions aux limites sur l'axe (2.64) et en champ lointain (2.68), et ce pour tous les modes  $(m, n)$  considérés dans les séries de Fourier. Il s'agit d'un problème d'évolution dans la direction axiale, résolu par une simple méthode de marche en  $x$ , où la solution est recherchée à chaque station sous la forme de couples  $(\alpha_{m,n}, \hat{\mathbf{q}}_{m,n})$ .

La détermination d'une solution exacte étant impossible, l'objectif est de calculer une solution approchée en un nombre fini de points. Pour cela, une discrétisation du domaine spatial  $(x, r)$  est nécessaire. Les termes de "maillage" ou de "grille" sont généralement utilisés. Cette étape est d'une importance cruciale car elle conditionne la convergence et la qualité de la solution. Ainsi, la répartition axiale et radiale des points de calcul doit être judicieuse pour répondre au mieux au problème posé.

Dans le cas présent, il s'agit d'étudier l'évolution axiale des instabilités hydrodynamiques se développant dans les écoulements de type jets. Comme vu dans le chapitre 1, ces écoulements présentent de très forts gradients radiaux localisés au niveau de la couche de mélange. Un raffinement radial du maillage autour de cette zone est donc nécessaire, principalement au niveau de la section de sortie où les gradients sont les plus importants. L'évasement du jet peut également être considéré avec une répartition radiale qui évolue axialement. Toutefois, la contrainte sur la discrétisation radiale autour de la couche de mélange diminue dans la direction axiale, de par la divergence même faible du jet et l'épaississement des couches de mélange. Ainsi, le choix est fait de conserver la même répartition radiale à toutes les positions axiales. De plus, la résolution du système PSE est faite par pas successifs en  $x$ . Un maillage cartésien dans cette direction semble être un choix approprié. Finalement, dans l'ensemble des configurations traitées, un maillage structuré bidimensionnel rectiligne localement raffiné autour de la couche de mélange initiale à  $r/d = 0.5$  sera utilisé. Un exemple de maillage est illustré sur la Fig. 2.2 où le nombre de points radiaux a été volontairement réduit dans un souci de visibilité.

Un maillage réaliste est constitué d'environ 250 points, dont 60% sont localisés dans l'intervalle  $r/d = [0, 1]$

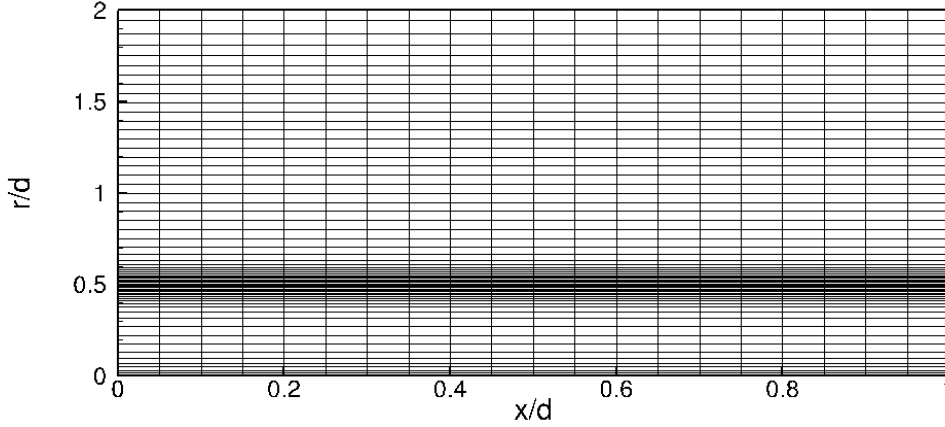


FIGURE 2.2 : Maillage structuré bidimensionnel rectiligne raffiné autour de  $r/d = 0.5$

### 2.3.2 Détermination des termes non linéaires

La détermination des termes de forçage  $\mathbf{TNL}_{\mathbf{m},\mathbf{n}}$  provenant des interactions entre modes doit être réalisée sur l'ensemble des modes  $(m, n)$ . Une première approximation nécessaire à l'estimation de ces termes consiste à limiter le nombre de modes, en considérant  $M \times N$  modes, par une troncature de la double somme des modes de Fourier. En négligeant à la fois les fluctuations incohérentes et les modes tronqués, la forme des perturbations est simplifiée :

$$\mathbf{q}'(x, r, \theta, t) = \sum_{n=-N}^N \sum_{m=-M}^M \tilde{\mathbf{q}}_{\mathbf{m},\mathbf{n}}(x, r) \exp [i(m\theta - n\omega t)] \quad (2.69)$$

Afin de quantifier l'impact des modes tronqués sur l'évolution des modes résolus, [Rodríguez et al. \(2011\)](#) ont analysé l'effet de troncature des séries de Fourier. En effet, dans un contexte non linéaire, toutes les fréquences et nombres d'onde azimutaux sont *a priori* couplés. Sur le cas d'un jet libre, les auteurs ont comparé les résultats obtenus par PSE en considérant six et neuf modes axisymétriques. Les écarts entre les deux cas sont négligeables à condition d'exclure les modes à basse fréquence  $St < 0.1$ . Toutefois, l'analyse de l'effet de troncature sur les modes azimutaux et dans le cas d'un jet forcé n'a jamais été réalisée.

Dans le but de valider l'estimation des termes non linéaires, deux méthodes de calcul présentées par [Léon \(2012\)](#) sont utilisées. La première consiste à réaliser une transformée de Fourier inverse des  $\hat{\mathbf{q}}_{\mathbf{m},\mathbf{n}}$  afin de déterminer la perturbation physique dans le domaine temporel  $\mathbf{q}'$  ainsi que ses dérivées axiales et radiales. Les  $\mathbf{TNL}$  sont alors calculés directement en effectuant le produit des perturbations dans l'espace physique. Finalement,

une transformée de Fourier des  $\mathbf{TNL}$  permet de déterminer les  $\mathbf{TNL}_{\mathbf{m},\mathbf{n}}$  dans le domaine spectral.

La seconde méthode permet de trouver directement une solution analytique des  $\mathbf{TNL}_{\mathbf{m},\mathbf{n}}$  dans le domaine spectral en identifiant les produits des séries à des produits de Cauchy :

$$\left( \sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_i \right) \cdot \left( \sum_{j=-\infty}^{+\infty} b_j \right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n, \quad \text{avec} \quad c_n = \left( \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k b_{n-k} \right) \quad (2.70)$$

Cependant, avec cette dernière méthode, une hypothèse, qui sera vérifiée dans la suite de cet exposé, consiste à ne garder que les contributions au deuxième ordre des  $\mathbf{TNL}_{\mathbf{m},\mathbf{n}}$ . Ainsi, étant donné que les contributions d'ordre supérieur ou égal à trois sont négligées dans notre cas, une solution analytique approchée au deuxième ordre des  $\mathbf{TNL}_{\mathbf{m},\mathbf{n}}$  peut être déterminée. L'expression analytique de ces termes est :

$$\begin{aligned} TNL_{m,n}^{(1)} = & \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \left[ \hat{u}_{x_{m-p,n-q}} \left( \frac{\partial \hat{\rho}_{p,q}}{\partial x} + i\alpha_{p,q} \hat{\rho}_{p,q} \right) \right. \\ & + \hat{\rho}_{m-p,n-q} \left( \frac{\partial \hat{u}_{x_{p,q}}}{\partial x} + i\alpha_{p,q} \hat{u}_{x_{p,q}} \right) \\ & + \hat{u}_{r_{m-p,n-q}} \frac{\partial \hat{\rho}_{p,q}}{\partial r} + \hat{\rho}_{m-p,n-q} \frac{\partial \hat{u}_{r_{p,q}}}{\partial r} + \frac{1}{r} \hat{u}_{r_{m-p,n-q}} \hat{\rho}_{p,q} \\ & \left. + \frac{im}{r} \hat{u}_{\theta_{m-p,n-q}} \hat{\rho}_{p,q} \right] \mathcal{A}_{m-p,n-q} \mathcal{A}_{p,q} \end{aligned} \quad (2.71a)$$

$$\begin{aligned} TNL_{m,n}^{(2)} = & \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \left[ \bar{\rho} \left( \hat{u}_{x_{m-p,n-q}} \left\{ \frac{\partial \hat{u}_{x_{p,q}}}{\partial x} + i\alpha_{p,q} \hat{u}_{x_{p,q}} \right\} \right. \right. \\ & + \hat{u}_{r_{m-p,n-q}} \frac{\partial \hat{u}_{x_{p,q}}}{\partial r} + \frac{ip}{r} \hat{u}_{\phi_{m-p,n-q}} \hat{u}_{x_{p,q}} \Big) \\ & + \hat{\rho}_{m-p,n-q} \left( -iq\omega \hat{u}_{x_{p,q}} + \bar{u}_x \left\{ \frac{\partial \hat{u}_{x_{p,q}}}{\partial x} + i\alpha_{p,q} \hat{u}_{x_{p,q}} \right\} \right. \\ & \left. \left. + \bar{u}_r \frac{\partial \hat{u}_{x_{p,q}}}{\partial r} + \hat{u}_{x_{p,q}} \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} + \hat{u}_{r_{p,q}} \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial r} \right) + o(\delta^2) \right] \mathcal{A}_{m-p,n-q} \mathcal{A}_{p,q} \end{aligned} \quad (2.71b)$$

$$\begin{aligned} TNL_{m,n}^{(3)} = & \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \left[ \bar{\rho} \left( \hat{u}_{x_{m-p,n-q}} \left\{ \frac{\partial \hat{u}_{r_{p,q}}}{\partial x} + i\alpha_{p,q} \hat{u}_{r_{p,q}} \right\} \right. \right. \\ & + \hat{u}_{r_{m-p,n-q}} \frac{\partial \hat{u}_{r_{p,q}}}{\partial r} + \frac{ip}{r} \hat{u}_{\phi_{m-p,n-q}} \hat{u}_{r_{p,q}} + \frac{1}{r} \hat{u}_{\theta_{m-p,n-q}} \hat{u}_{\theta_{p,q}} \Big) \\ & + \hat{\rho}_{m-p,n-q} \left( -iq\omega \hat{u}_{r_{p,q}} + \bar{u}_x \left\{ \frac{\partial \hat{u}_{r_{p,q}}}{\partial x} + i\alpha_{p,q} \hat{u}_{r_{p,q}} \right\} \right. \\ & \left. \left. + \bar{u}_r \frac{\partial \hat{u}_{r_{p,q}}}{\partial r} + \hat{u}_{x_{p,q}} \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial x} + \hat{u}_{r_{p,q}} \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial r} \right) + o(\delta^2) \right] \mathcal{A}_{m-p,n-q} \mathcal{A}_{p,q} \end{aligned} \quad (2.71c)$$

$$\begin{aligned}
 TNL_{m,n}^{(4)} = & \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \left[ \bar{\rho} \left( \hat{u}_{x_{m-p,n-q}} \left\{ \frac{\partial \hat{u}_{\theta_{p,q}}}{\partial x} + i\alpha_{p,q} \hat{u}_{\theta_{p,q}} \right\} \right. \right. \\
 & + \hat{u}_{r_{m-p,n-q}} \frac{\partial \hat{u}_{\theta_{p,q}}}{\partial r} + \frac{ip}{r} \hat{u}_{\theta_{m-p,n-q}} \hat{u}_{\theta_{p,q}} + \frac{1}{r} \hat{u}_{r_{m-p,n-q}} \hat{u}_{\theta_{p,q}} \Big) \\
 & + \hat{\rho}_{m-p,n-q} \left( -iq\omega \hat{u}_{\theta_{p,q}} + \bar{u}_x \left\{ \frac{\partial \hat{u}_{\theta_{p,q}}}{\partial x} + i\alpha_{p,q} \hat{u}_{\theta_{p,q}} \right\} \right. \\
 & \left. \left. + \bar{u}_r \frac{\partial \hat{u}_{\theta_{p,q}}}{\partial r} + \frac{1}{r} \bar{u}_r \hat{u}_{\theta_{p,q}} \right) + o(\delta^2) \right] \mathcal{A}_{m-p,n-q} \mathcal{A}_{p,q}
 \end{aligned} \tag{2.71d}$$

$$\begin{aligned}
 TNL_{m,n}^{(5)} = & \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \left[ \bar{\rho} M_j^2 \left( \hat{u}_{x_{m-p,n-q}} \left\{ \frac{\partial \hat{p}_{p,q}}{\partial x} + i\alpha_{p,q} \hat{p}_{p,q} \right\} \right. \right. \\
 & + \hat{u}_{r_{m-p,n-q}} \frac{\partial \hat{p}_{p,q}}{\partial r} + \frac{ip}{r} \hat{u}_{\theta_{m-p,n-q}} \hat{p}_{p,q} \Big) \\
 & + \hat{\rho}_{m-p,n-q} M_j^2 \left( -iq\omega \hat{p}_{p,q} + \bar{u}_x \left\{ \frac{\partial \hat{p}_{p,q}}{\partial x} + i\alpha_{p,q} \hat{p}_{p,q} \right\} \right. \\
 & + \bar{u}_r \frac{\partial \hat{p}_{p,q}}{\partial r} \Big) - \hat{u}_{x_{m-p,n-q}} \left\{ \frac{\partial \hat{p}_{p,q}}{\partial x} + i\alpha_{p,q} \hat{p}_{p,q} \right\} \\
 & - \hat{u}_{r_{m-p,n-q}} \frac{\partial \hat{p}_{p,q}}{\partial r} - \frac{ip}{r} \hat{u}_{\theta_{m-p,n-q}} \hat{p}_{p,q} \\
 & - \gamma M_j^2 \hat{p}_{m-p,n-q} \left( -iq\omega \hat{p}_{p,q} + \bar{u}_x \left\{ \frac{\partial \hat{p}_{p,q}}{\partial x} + i\alpha_{p,q} \hat{p}_{p,q} \right\} \right. \\
 & \left. \left. + \hat{u}_{x_{p,q}} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x} + \bar{u}_r \frac{\partial \hat{p}_{p,q}}{\partial r} + \hat{u}_{r_{p,q}} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial r} \right) + o(\delta^2) \right] \mathcal{A}_{m-p,n-q} \mathcal{A}_{p,q}
 \end{aligned} \tag{2.71e}$$

Une comparaison entre les deux méthodes est réalisée dans le chapitre 3. Les résultats fournis par chacune des méthodes sont en parfait accord. Toutefois, avec l'utilisation d'un algorithme de transformée de Fourier rapide, la première approche permet une estimation plus rapide des  $\mathbf{TNL}_{m,n}$  et sera donc privilégiée.

### 2.3.3 Approximation des dérivées axiales

Par souci de clarté, l'aspect numérique lié aux PSE est limité dans un premier temps à la détermination d'une solution approchée du seul système non homogène d'équations aux dérivées partielles linéaires (2.33). Une approche classique consiste à discrétiser par différences finies les opérateurs de dérivation en utilisant des formules de Taylor.

Dans la direction axiale, la modélisation choisie impose une lente variation des fonctions d'amplitude. Ainsi, un schéma d'Euler implicite décentré d'ordre 1 est généralement jugé suffisant pour estimer les dérivées axiales. En effet, sur le cas d'un jet analytique incompressible préalablement étudié par Yen et Messersmith (1998), Léon (2012) a montré que les effets d'un schéma d'ordre 2 étaient négligeables.

La dérivée par rapport à  $x$  d'une variable  $\xi_j$  discrète approchée au point  $x_j$  s'écrit donc :

$$\frac{\partial \xi_j}{\partial x} = \frac{\xi_j - \xi_{j-1}}{\Delta x} \quad (2.72)$$

avec  $\Delta x = x_j - x_{j-1}$  constant.

La stabilité du schéma est assurée par le caractère implicite de la formulation choisie, comme souligné dans les travaux de [Airiau \(1994\)](#).

#### 2.3.4 Approximation des dérivées radiales

Dans la direction radiale, il est primordial de capturer finement l'inflexion du profil de vitesse à l'origine de l'instabilité de Kelvin-Helmholtz. [Malik et Chang \(2000\)](#) et [Rodríguez et al. \(2011\)](#) ont choisi d'utiliser un schéma aux différences finies centré d'ordre 4. Cette méthode permet d'obtenir des résultats précis pour un nombre raisonnable de points, sans contrainte particulière sur la discrétisation radiale. [Piot et al. \(2006\)](#) et [Léon \(2012\)](#) utilisent quant à eux une méthode de collocation spectrale avec une décomposition des fonctions propres sur la base des polynôme de Tchebychev. Cette méthode nécessite moins de points et est plus précise que les méthodes de type différences finies. Toutefois, la contrainte sur le maillage est plus sévère et des oscillations de type Gibbs peuvent apparaître si la répartition des points de collocation n'est pas parfaitement adaptée au problème. Si, dans un contexte linéaire, cette méthode est à privilégier, la prise en compte des termes non linéaires, qui présentent de fortes oscillations radiales sur une grande étendue spatiale, la met en défaut.

Après l'utilisation et la comparaison de différents schémas numériques, les schémas compacts se sont avérés être le meilleur compromis, offrant une précision pseudo-spectrale et une contrainte sur le maillage similaire à celles des méthodes de différences finies classiques. Sur maillage uniforme, le schéma choisi est celui développé par [Lele \(1992\)](#) qui peut être utilisé non seulement pour l'approximation des dérivées, mais également pour des applications de filtrage et d'interpolation. À titre d'information, ce schéma sera également utilisé comme procédure de filtrage lors du pré-traitement du champ de base. Précisément, une approximation tridiagonale d'ordre 6 de la dérivée radiale première est obtenue par :

$$\frac{1}{3} \xi'_{j-1} + \xi'_j + \frac{1}{3} \xi'_{j+1} = \frac{14}{9} \frac{\xi_{j+1} - \xi_{j-1}}{2h} + \frac{1}{9} \frac{\xi_{j+2} - \xi_{j-2}}{4h} \quad (2.73)$$

avec  $h = r_j - r_{j-1}$  le pas constant de discrétisation.

À proximité des limites du domaine, des schémas décentrés sont nécessaires. Un schéma de Padé d'ordre 3 est utilisé aux nœuds 1 et N, soit respectivement :

$$\xi'_1 + 2 \xi'_2 = \frac{1}{h} \left( -\frac{5}{2} \xi_1 + 2 \xi_2 + \frac{1}{2} \xi_3 \right) \quad (2.74)$$

$$\xi'_N + 2 \xi'_{N-1} = \frac{1}{h} \left( \frac{5}{2} \xi_N - 2 \xi_{N-1} - \frac{1}{2} \xi_{N-2} \right) \quad (2.75)$$

Aux nœuds 2 et N-1, l'ordre du schéma de Padé est augmenté à 4, soit :

$$\frac{1}{4} \xi'_1 + \xi'_2 + \frac{1}{4} \xi'_3 = \frac{3}{4h} (\xi_3 - \xi_1) \quad (2.76)$$

$$\frac{1}{4} \xi'_{N-2} + \xi'_{N-1} + \frac{1}{4} \xi'_N = \frac{3}{4h} (\xi_N - \xi_{N-2}) \quad (2.77)$$

L'ensemble de ces équations permettent de construire une matrice de dérivation valable uniquement si la répartition des points est uniforme. Or, comme mentionné précédemment, un maillage non uniforme est primordial dans la direction radiale avec un raffinement local autour de la couche de mélange. Pour passer du maillage uniforme au non uniforme, deux solutions sont possibles. La première consiste à réaliser une transformation jacobienne pour approcher les fonctions physiques sur le maillage uniforme. Il s'agit bel et bien d'une approximation qui peut donc être source d'erreurs. La deuxième approche est celle adoptée par Gamet *et al.* (1999) qui consiste à étendre le schéma numérique de Lele (1992) à la prise en compte d'un pas de discrétisation non uniforme. On obtient un système d'équations équivalent à (2.73)-(2.77). Après inversion de ce système, la matrice de dérivation  $\Lambda_j$  est écrite comme :

$$\frac{\partial \xi_j}{\partial r} = \Lambda_j \cdot \xi_j \quad (2.78)$$

Ainsi, le schéma compact d'ordre 4 sur maillage non uniforme de Gamet *et al.* (1999) sera utilisé dans la suite de ce manuscrit pour estimer les dérivées radiales.

### 2.3.5 Résolution du système

La méthode de détermination des couples  $(\alpha_{jm,n}^p, \hat{\mathbf{q}}_{jm,n}^p)$  est un processus itératif, où l'exposant  $p$  est choisi pour symboliser un nombre d'itérations. À la première itération, les  $\alpha_{jm,n}^0$  et les  $\hat{\mathbf{q}}_{jm,n}^0$  sont obtenus, soit en  $x_0$  par les conditions initiales issues de l'analyse de stabilité locale, soit en  $x_j$  par la solution à l'abscisse précédente  $x_{j-1}$ . Cette initialisation est effectuée uniquement sur les indices d'harmoniques fréquentielles positifs  $n \geq 0$ . Les conditions de symétrie permettent d'étendre l'initialisation à l'ensemble des modes considérés. Les termes non linéaires  $\mathbf{TNL}_{jm,n}^p$  sont ensuite calculés à chaque itération pour tous les modes, à partir des valeurs des perturbations de l'itération précédente  $p-1$ . Pour  $p=0$ , ils sont déterminés par la solution à l'abscisse précédente  $x_{j-1}$ , hormis à la station initiale où ils sont négligés. Une fois le calcul des termes non linéaires effectué, l'approximation des dérivées axiales et radiales permet de définir le système PSE discret :

$$\left( \mathbf{A}_{jm,n} + \mathbf{B}_j + \frac{\mathbf{C}_j}{\Delta x} + \mathbf{D}_j \cdot \Lambda_j \right) \cdot \hat{\mathbf{q}}_{jm,n} = \frac{\mathbf{C}_j}{\Delta x} \cdot \hat{\mathbf{q}}_{j-1m,n} - \frac{\mathbf{TNL}_{jm,n}}{\mathcal{A}_{jm,n}} \quad (2.79)$$

Le terme non linéaire étant connu, au même titre que la solution à l'abscisse précédente  $x_{j-1}$ , le membre de droite est donc connu. La résolution numérique du système PSE discret permet d'obtenir une estimation de la solution  $\hat{\mathbf{q}}_{j,m,n}^{p+1}$  à l'abscisse courante  $x_j$ . Le nombre d'onde axial  $\alpha_{j,m,n}^p$  est ensuite corrigé à l'aide de la condition de normalisation de sorte que :

$$\alpha_{j,m,n}^{p+1} = \alpha_{j,m,n}^p - \frac{i}{\Delta x} \frac{\int_0^\infty \hat{\mathbf{q}}_{j,m,n}^{\dagger p} \cdot (\hat{\mathbf{q}}_{j,m,n}^p - \hat{\mathbf{q}}_{j-1,m,n}^p) dr}{\int_0^\infty \hat{\mathbf{q}}_{j,m,n}^{\dagger p} \hat{\mathbf{q}}_{j,m,n}^p dr} \quad (2.80)$$

Une itération sur  $p$  est finalement réalisée jusqu'à satisfaire le critère de convergence suivant :

$$\left| \frac{\alpha_{j,m,n}^{p+1} - \alpha_{j,m,n}^p}{\alpha_{j,m,n}^{p+1}} \right| \leq 10^{-4} \quad (2.81)$$

Après une analyse de la convergence sur différents cas tests, cette valeur de  $10^{-4}$  a été jugée suffisante pour l'obtention d'une solution convergée à l'abscisse courante  $x_j$ . Une diminution du seuil, bien que possible, ne fait qu'augmenter le temps de calcul pour une solution qui n'est en rien altérée. Une méthode de Newton-Raphson est utilisée afin d'accélérer la convergence du processus itératif. Généralement, en non linéaire, une dizaine d'itérations est nécessaire pour vérifier le critère de convergence.

Une fois cette solution convergée obtenue, l'étude des modes résonants est effectuée afin de voir si leurs amplitudes sont suffisantes pour que ces modes soient considérés à l'abscisse suivante. Finalement, une marche en  $x$  est effectuée et le processus itératif réinitialisé, et ce jusqu'à l'abscisse finale du calcul. De façon similaire à ce qui a été réalisé par [Airiau \(1994\)](#) et [Léon \(2012\)](#) dans le cadre des PSE linéaires, un organigramme permettant de synthétiser l'ensemble des étapes mentionnées précédemment est représenté sur la Fig. 2.3.



**A**FIN d'étendre la modélisation des instabilités hydrodynamiques des jets au moyen des équations de stabilité parabolisées (PSE) à la prise en compte des interactions possibles entre modes, les équations du mouvement du fluide sont établies dans un premier temps pour le cas général. Par la technique des perturbations, le champ instantané est défini comme la superposition d'un champ de base stationnaire et d'une fluctuation. Dans la présente étude, le champ moyen obtenu par LES est assimilé au champ de base. Une discussion est apportée sur le choix délicat de ce dernier dans le cas des écoulements turbulents. Les équations du mouvement des perturbations, sur lesquelles repose l'approche PSE, sont finalement développées dans le repère cylindrique qui est le plus adapté à l'étude des écoulements de type jet sortant d'une tuyère axisymétrique.

Le développement de l'approche PSE est ensuite réalisé dans un contexte faiblement non linéaire. La forme modale choisie et les hypothèses sous-jacentes faites pour modéliser à la fois l'évolution et les interactions non linéaires des structures cohérentes à grandes échelles y sont détaillées. Une attention particulière est portée sur la déformation du champ moyen. Si dans le cas des jets turbulents naturels, le fait de considérer le champ moyen comme champ de base permet d'inclure indirectement les modes stationnaires, le choix discutable de les négliger dans le cas des jets forcés est provisoirement fait.

Finalement, l'obtention d'une solution analytique étant inenvisageable, une discrétisation du système PSE non linéaire est établie. Une présentation détaillée de l'ensemble des étapes du processus itératif et des méthodes numériques retenues pour la résolution du système est réalisée.

Le modèle développé dans ce chapitre permet non seulement de prendre en compte la faible divergence de l'écoulement sur l'évolution des structures cohérentes à grande échelle des jets mais également de considérer les interactions non linéaires qui peuvent apparaître entre ces ondes d'instabilité. Une interrogation persiste néanmoins sur l'importance de ces non-linéarités dans le cas des jets turbulents naturels. Si tel est le cas, une amélioration de la prévision du rayonnement acoustique des jets possédant une vitesse de phase subsonique serait envisageable au moyen de l'approche PSE non linéaire.

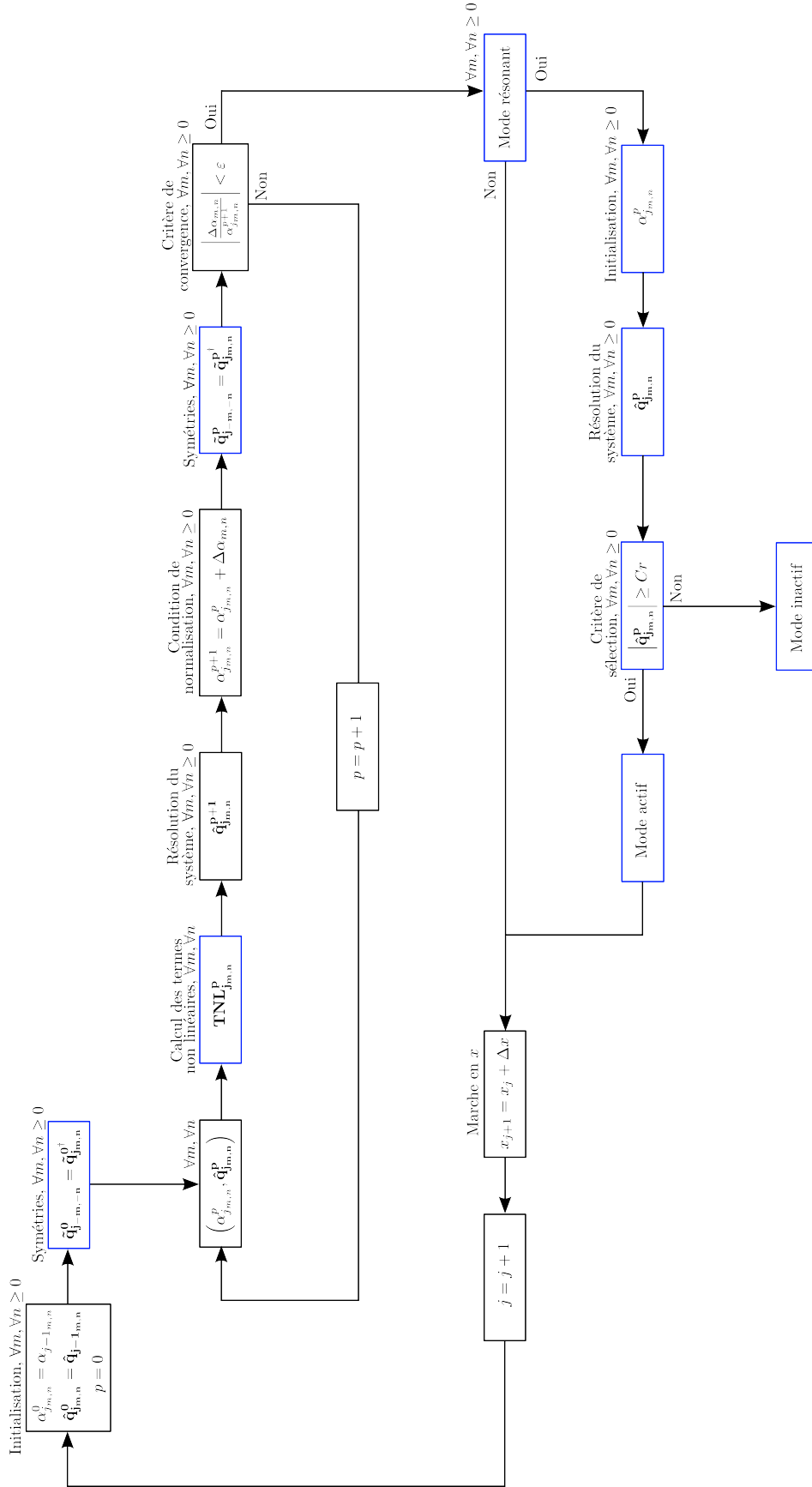


FIGURE 2.3 : Organigramme de résolution du système PSE non linéaire



## Analyse d'un jet subsonique par les approches PSE linéaires et non linéaires

**S**UITE au développement de l'approche PSE non linéaire, son application sur une configuration réaliste de jet, traitée à la fois expérimentalement et numériquement, est exposée dans ce chapitre. L'objectif est de déterminer si les interactions non linéaires entre les ondes d'instabilité ont un impact sur la dynamique et le rayonnement acoustique du jet. Dans un premier temps, on présente les caractéristiques de l'écoulement ainsi que les résultats expérimentaux et numériques existants sur cette configuration. Une analyse PSE linéaire est ensuite menée, où le champ moyen issu de la simulation LES est défini comme le champ de base pour les calculs de stabilité. Les résultats en champ proche et en champ lointain sont comparés aux mesures et aux simulations existantes. Finalement, l'impact des interactions entre les ondes d'instabilité dans le cas d'un jet naturel est évalué par l'utilisation de l'approche non linéaire.

### Sommaire

<b>3.1</b>	<b>Présentation des résultats expérimentaux et numériques existants sur le jet étudié . . . . .</b>	<b>78</b>
3.1.1	Caractéristiques du jet . . . . .	78
3.1.2	Dispositif expérimental . . . . .	78
3.1.3	Simulation aux grandes échelles (LES) . . . . .	80
<b>3.2</b>	<b>Analyse PSE linéaire des fluctuations de pression en champ proche . . . . .</b>	<b>81</b>
3.2.1	Interpolation du champ de base sur le maillage PSE . . . . .	81
3.2.2	Analyse PSE linéaire . . . . .	83
3.2.3	Comparaison des résultats PSE et LES avec les mesures . . . . .	86
<b>3.3</b>	<b>Propagation en champ lointain des perturbations de pression . . . . .</b>	<b>91</b>
3.3.1	Méthode de propagation par surface de Kirchhoff . . . . .	91
3.3.2	Comparaison des directivités acoustiques . . . . .	92
<b>3.4</b>	<b>Étude de l'impact des interactions non linéaires avec les PSE . . . . .</b>	<b>94</b>
3.4.1	Détermination de l'amplitude initiale réelle des modes . . . . .	94
3.4.2	Effet de l'amplitude initiale des modes . . . . .	95
3.4.3	Validation du calcul des Termes Non Linéaires . . . . .	97
3.4.4	Analyse PSE non linéaires et impact des interactions modales . . . . .	97

### 3.1 Présentation des résultats expérimentaux et numériques existants sur le jet étudié

#### 3.1.1 Caractéristiques du jet

La configuration étudiée dans la suite du manuscrit est celle d'un jet chaud subsonique qui a fait l'objet de nombreuses études au sein de l'ONERA, à la fois expérimentales et numériques, avec notamment les travaux de Dahan (1976, 1977), Biancherin (2003), Muller *et al.* (2006), Piot *et al.* (2006), Huet (2013) et Lorteau *et al.* (2013, 2014, 2015). Il s'agit d'un jet turbulent à haut nombre de Reynolds  $Re_d = 4 \times 10^5$  et fortement chauffé avec  $T_j/T_\infty = 2.96$ . De ce fait, la vitesse du son dans le jet est supérieure à celle du milieu ambiant. Ainsi, bien que le jet soit subsonique avec un nombre de Mach à l'éjection  $M_j = U_j/c_j = 0.7$ , ce dernier est supersonique vis-à-vis du milieu ambiant avec un nombre de Mach acoustique  $M_\infty = U_j/c_\infty = 1.2$ . Par conséquent, le principal mécanisme acoustique sera le rayonnement par ondes de Mach. Une synthèse des caractéristiques du jet est exposée dans le Tab.3.1. Les valeurs dimensionnées correspondent au dispositif expérimental présenté ci-après.

TABLE 3.1 : Point de fonctionnement de la configuration étudiée.

$d$ (m)	$U_j$ (m.s <sup>-1</sup> )	$T_j$ (K)	$T_\infty$ (K)	$Re_d$	$M_j$	$M_\infty$	$T_j/T_\infty$
0.08	410	830	280	$4 \times 10^5$	0.7	1.2	2.96

#### 3.1.2 Dispositif expérimental

Les campagnes de mesures ont été réalisées dans la soufflerie anéchoïque CEPRA 19 de l'ONERA. CEPRA 19 est une soufflerie à circuit ouvert, dite de type "Eiffel" avec pour veine d'essais une chambre anéchoïque en forme de quart de sphère de 9.5 m de rayon, comme illustré sur la Fig. 3.1. Afin de délivrer un écoulement stable et uniforme, la chambre de tranquillisation de  $9 \times 9$  m<sup>2</sup> est munie de filtres, de deux rangées de baffles acoustiques pour limiter le bruit d'origine externe et d'une série d'écrans et de grilles en nid d'abeille pour réduire le taux de turbulence. Deux convergents peuvent être utilisés, de 3 m et 2 m de diamètre, pour produire respectivement une vitesse maximale de 61 m.s<sup>-1</sup> et 130 m.s<sup>-1</sup>.

Dans le cadre de la présente étude, une tuyère circulaire simple-flux de diamètre  $d = 0.08$  m a été installée à l'entrée de la veine d'essais. Afin de répondre aux caractéristiques du jet préalablement décrites, un écoulement à une vitesse  $U_j = 410$  m.s<sup>-1</sup> et à une température  $T_j = 830$  K est produit par la tuyère. Pour cette configuration, des mesures acoustiques en champ proche et en champ lointain ont été réalisées.

En champ proche, une antenne azimutale composée de 20 microphones Brüel & Kjær 4939, équirépartis en azimut, a été utilisée pour effectuer des mesures instationnaires des fluctuations de pression. Un domaine spatial en  $x/d = [-2; 15]$  et en  $r/d = [1.5; 5]$  a été étudié en exploitant différentes positions axiales et radiales de l'antenne. De plus, par une transformée de Fourier dans la direction azimutale, cette antenne permet d'effectuer des décompositions azimutales des signaux. Ainsi, les résultats obtenus pour chaque mode par l'analyse de stabilité peuvent être comparés de façon détaillée aux mesures.

Les niveaux de pression en champ lointain ont quant à eux été obtenus à partir de 16 microphones Brüel & Kjær 4939, placés sur un arc à  $75 d$  de l'axe du jet dans le plan de sortie de la tuyère, pour des angles allant de  $30^\circ$  à  $140^\circ$ , comme représenté sur la Fig. 3.1.

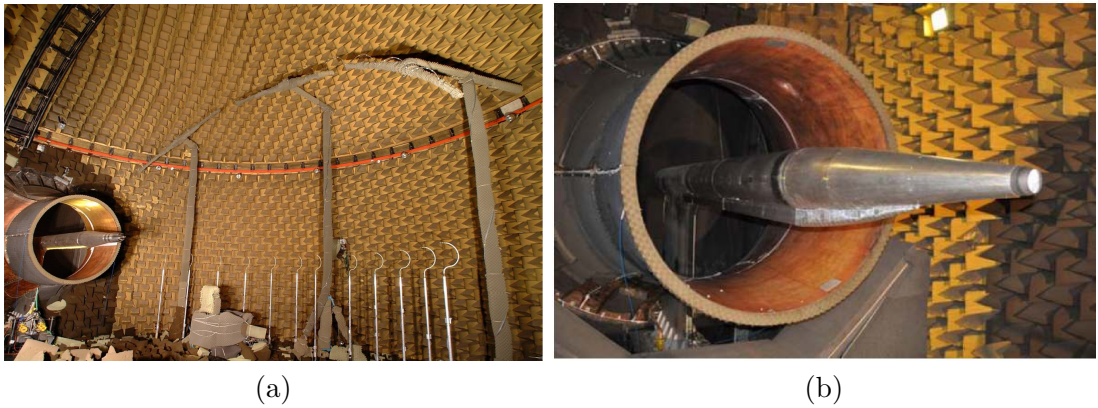


FIGURE 3.1 : Photographies du matériel de mesures acoustiques (a) et de la tuyère  $d = 0.08 m$  (b) dans la soufflerie anéchoïque CEPRA 19 de l'ONERA, extrait de [Lorteau et al. \(2013\)](#).

À noter que des mesures aérodynamiques ont également été effectuées sur cette configuration, au moyen d'une sonde cinq trous et par LDV. Les mesures de vitesse axiale moyenne et rms sur l'axe ont notamment été utilisées pour évaluer la pertinence des résultats obtenus par la simulation LES.

Historiquement, une première campagne d'essais a eu lieu en 2006 par [Muller \(2006\)](#). Sur cette base de données, [Piot et al. \(2006\)](#) ont notamment effectué une comparaison des résultats obtenus par LES et par PSE linéaires avec les mesures. Les deux approches ont montré une évolution similaire qui reproduit correctement les mesures, hormis en aval du cône potentiel. Malheureusement, aucune donnée expérimentale n'était disponible dans cette zone de l'écoulement pour discriminer l'une ou l'autre des deux approches. Il a alors été suggéré que ces écarts soient dus à des effets non linéaires non pris en compte par l'approche PSE linéaire. De plus, [Muller \(2006\)](#) a noté une déviation de l'axe du jet vers le bas, ce qui altère inévitablement la qualité des mesures et plus particulièrement la décomposition azimutale des signaux. Une nouvelle campagne d'essais a ainsi été réalisée en 2010, où un capotage externe a été utilisé pour garantir le maintien de la tuyère et

supprimer la déviation de l'axe du jet. [Lorteau et al. \(2013\)](#) ont alors remarqué que les basses fréquences des modes azimutaux élevés ( $m \geq 4$ ) sont les plus influencées par cette déviation. Des mesures en champ proche en aval du cône potentiel ont également été réalisées pour palier aux problèmes soulignés lors de la campagne de 2006. Dans ce manuscrit, les résultats expérimentaux présentés sont ceux de la campagne de 2010.

### 3.1.3 Simulation aux grandes échelles (LES)

Dans l'optique de reproduire numériquement l'étude menée en 2010 à CEPRA 19, une simulation aux grandes échelles (LES) a été réalisée par [Lorteau \(2015\)](#) avec le code CEDRE<sup>®</sup> (Calcul des Écoulements Diphasiques Réactifs pour l'Énergétique) développé par l'ONERA. CEDRE<sup>®</sup> est une plateforme logicielle multiphysique permettant la simulation d'écoulements multiphasiques et multi-espèces. Elle est utilisée pour des applications industrielles et de recherches dans les domaines de l'énergétique et de la propulsion tels que la combustion, le givrage ou encore le bruit de jet. La résolution des équations de Navier-Stokes est effectuée sur des maillages polyédriques par une approche de type volumes finis pour les variables conservatives.

Le modèle de sous-maille de Smagorinsky a été choisi par [Lorteau \(2015\)](#) pour modéliser les plus petites échelles de la turbulence. Le maillage est axisymétrique et correspond à une rotation sur  $360^\circ$  d'une grille 2D, hormis sur l'axe où un maillage en O est utilisé pour traiter la singularité et limiter la taille des mailles près de l'axe. Une coupe du maillage dans le plan  $z = 0$  est présentée sur la Fig. 3.2. La discrétisation azimutale a été fixée à 480 plans azimutaux suite à une étude de convergence en maillage.

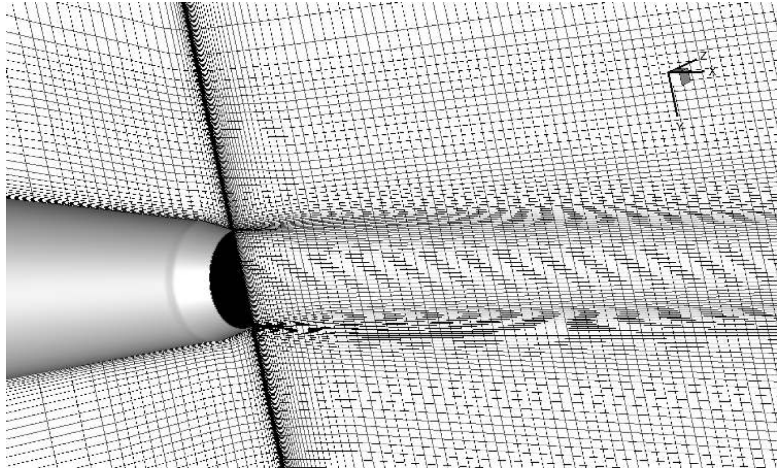


FIGURE 3.2 : Coupe du maillage dans le plan  $x = 0$  où seulement un point sur cinq est représenté, extrait de [Lorteau \(2015\)](#).

Afin de garantir le bon développement de l'écoulement en aval de la sortie de tuyère, une zone conique allant de  $(x/d = -2; r/d = 2.4)$  à  $(x/d = 25; r/d = 5)$ , a été raffinée

de sorte que la fréquence de coupure du maillage corresponde à un nombre de Strouhal  $St = 1.0$ . Un intérêt particulier a été porté sur la résolution de la couche limite se développant dans la tuyère pour décrire fidèlement l'état initialement turbulent du jet. La solution retenue a été d'introduire une petite marche dans la tuyère pour déstabiliser la couche limite. Une étude paramétrique a été réalisée pour déterminer la position et la hauteur de la marche afin de garantir un développement de la couche de cisaillement en accord avec les données expérimentales. En définitive, le maillage obtenu est composé d'environ 240 millions de cellules.

A l'entrée de la tuyère, seuls des profils uniformes de pression totale et de température totale sont imposés, de manière à laisser la couche limite se développer librement. Un schéma temporel implicite de Runge-Kutta d'ordre deux a été utilisé, associé à un schéma spatial d'ordre deux pour résoudre les équations de Navier-Stokes. La simulation a été effectuée avec un pas de temps  $\Delta t = 5 \times 10^{-7}$  sur une durée physique de 100 ms, correspondant à 500 unités de temps convectives, considérée comme suffisante pour assurer la convergence des statistiques de l'écoulement moyen.

Par comparaison avec les résultats de mesure, la longueur du cône potentiel, le niveau rms de la vitesse axiale sur l'axe, la croissance de la couche de cisaillement ainsi que la structure spatio-temporelle de la pression en champ proche et en champ lointain sont correctement représentés par la simulation LES de [Lorteau \(2015\)](#).

## 3.2 Analyse PSE linéaire des fluctuations de pression en champ proche

### 3.2.1 Interpolation du champ de base sur le maillage PSE

Comme souligné dans le chapitre 2.2, le champ moyenné en temps et en azimut obtenu par la LES est utilisé comme champ de base pour l'étude de stabilité. La Fig. 3.3 représente les contours de vitesse axiale moyenne extraite du calcul LES.

Toutefois, le maillage PSE ne nécessite pas d'être aussi raffiné que le maillage LES. Dans le cas présent, le domaine choisi est restreint à  $x/d = [0.3; 10]$  et  $r/d = [0; 15]$ . La station initiale a été définie à  $x/d = 0.3$  pour éviter les problèmes numériques liés à la zone de recirculation qui apparaît en sortie de tuyère de par l'épaisseur de la lèvre. Le maillage est structuré, bidimensionnel, rectiligne, raffiné autour de  $r/d = 0.5$  avec 251 points dans la direction radiale et des incréments axiaux constants  $\Delta x = 0.1$ . Puisque moins de points sont requis par l'approche PSE, une interpolation des données LES sur le maillage PSE est nécessaire. Pour cela, une approximation par B-spline cubique a été réalisée. Elle offre l'avantage de limiter l'apparition d'oscillations parasites telles que le phénomène de Runge dans le cas de l'interpolation polynomiale. Un point crucial est également de limiter les oscillations qui peuvent apparaître lors du calcul des dérivées



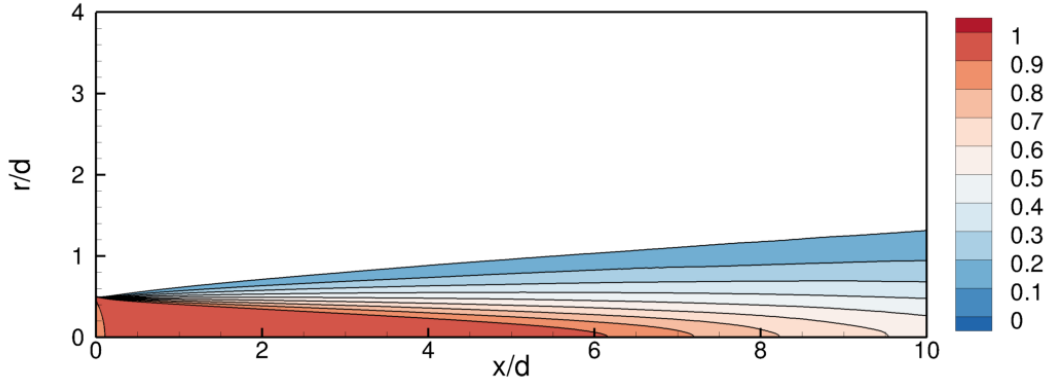


FIGURE 3.3 : Contours de vitesse axiale moyenne extrait du calcul LES réalisé par Lorteau (2015).

axiales et radiales du champ de base, ces dernières intervenant directement dans le système PSE. Pour répondre à ce problème, le filtre compact centré d'ordre six sur maillage uniforme proposé par Lele (1992) a été implanté de façon à être en accord avec le schéma numérique de dérivation utilisé dans la direction radiale. Ainsi, la valeur filtrée  $\hat{\xi}_j$  en  $r_j$  est calculée par :

$$\frac{1}{3} \hat{\xi}_{j-1} + \hat{\xi}_j + \frac{1}{3} \hat{\xi}_{j+1} = \frac{14}{9} \frac{\xi_{j+1} - \xi_{j-1}}{2h} + \frac{1}{9} \frac{\xi_{j+2} - \xi_{j-2}}{4h} \quad (3.1)$$

avec  $h = r_j - r_{j-1}$  le pas de discrétisation. Au bord du domaine, bien que des schémas décentrés de filtrage soient proposés par Lele (1992), aucun traitement n'a été appliqué, les variations brutales des variables d'écoulement étant principalement localisées loin des limites du domaine au niveau de la couche de mélange. De plus, contrairement au calcul des dérivées, l'utilisation ou l'inclusion d'une métrique n'est pas nécessaire. L'atténuation des oscillations à haute fréquence par la procédure de filtrage sur le calcul de la dérivée radiale de la vitesse axiale moyenne  $\partial \bar{u}_x / \partial r$  à la station  $x/d = 0.3$  est représentée sur la Fig. 3.4.

Si une interpolation et un filtrage de la vitesse moyenne radiale  $\bar{u}_r$  calculée par LES sont ici possibles de par la qualité de la solution obtenue, généralement cette donnée est difficilement exploitable. Ainsi, une dernière étape consiste à reconstruire le champ de vitesse moyenne radiale  $\bar{u}_r$  par la résolution de l'équation de continuité. La Fig. 3.5 propose une comparaison des profils moyens de vitesse axiale, de vitesse radiale et de masse volumique à la station  $x/d = 0.3$  issus des résultats « bruts » LES et après interpolation puis filtrage sur le maillage PSE. Pour la vitesse moyenne axiale  $\bar{u}_x$  et la masse volumique moyenne  $\bar{\rho}$ , les écarts sont négligeables. En revanche, pour la vitesse moyenne radiale  $\bar{u}_r$ , les résultats sont plus discutables. En effet, les procédures de filtrage et d'interpolation altèrent suffisamment l'écoulement pour ne pas garantir la conservation de

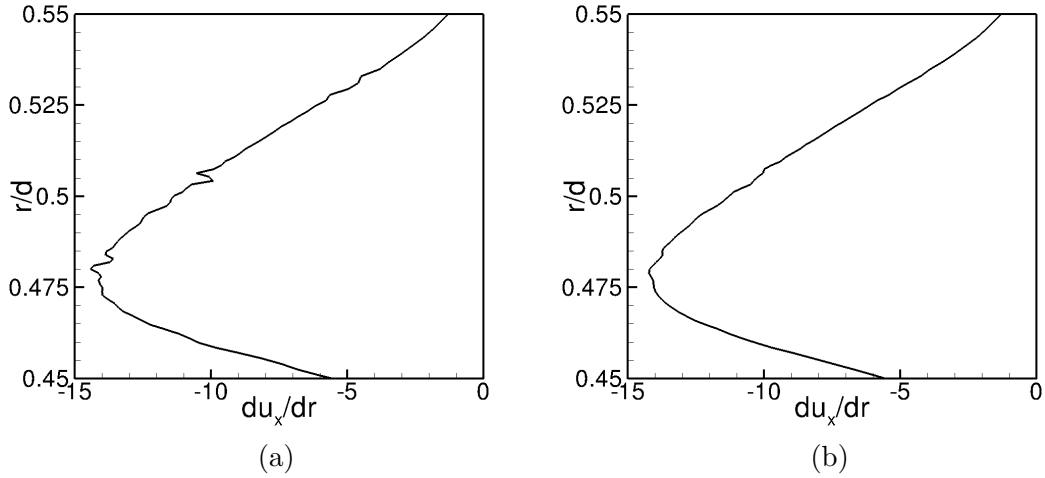


FIGURE 3.4 : Profils à  $x/d = 0.3$  du gradient radial de vitesse axiale moyenne avant (a) et après (b) application du filtre compact d'ordre six proposé par [Lele \(1992\)](#).

la masse. Il est donc primordial de reconstruire la vitesse moyenne radiale  $\bar{u}_r$  pour que l'équation de continuité soit bien vérifiée. Cependant, après différents essais en linéaire et en non linéaire, l'interpolation ou la reconstruction de la vitesse moyenne radiale  $\bar{u}_r$  semble avoir un effet mineur sur la solution PSE. Afin de s'assurer que l'équation de continuité est bien vérifiée, la solution interpolée et filtrée avec une reconstruction de la vitesse moyenne radiale  $\bar{u}_r$  sera choisie dans la suite de l'analyse.

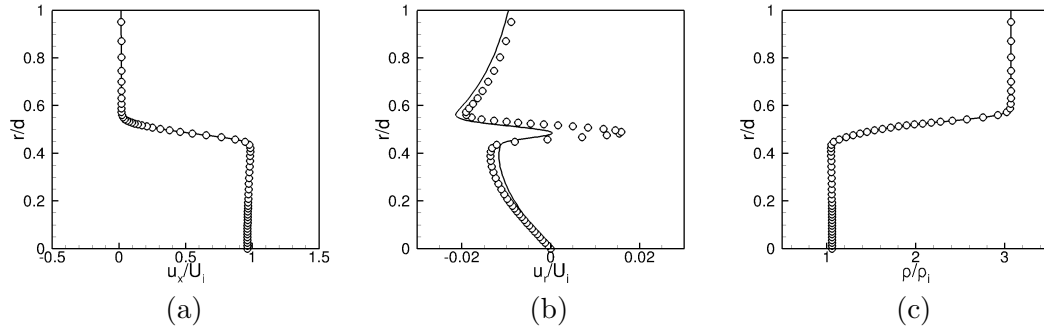


FIGURE 3.5 : Profils moyens à  $x/d = 0.3$  de vitesse axiale (a), de vitesse radiale (b) et de masse volumique (c); (—) Reconstruction sur maillage PSE; (o) Données LES.

### 3.2.2 Analyse PSE linéaire

L'analyse PSE se concentre dans un premier temps sur le mode axisymétrique  $m = 0$  pour un nombre de Strouhal  $St = 0.36$  qui, comme remarqué dans la suite, se trouve être le mode le plus amplifié dans le cas de cet écoulement de base. Le but est ici de présenter la démarche générale qui est adoptée pour mener une analyse PSE linéaire.

La première étape consiste à réaliser un calcul de stabilité locale afin de déterminer la valeur propre et les vecteurs propres à la station initiale  $x/d = 0.3$ . Le spectre de

stabilité donne alors la répartition des nombres d'onde axiaux  $\alpha$  dans le plan complexe, comme représenté sur la Fig. 3.6. Le mode instable de Kelvin-Helmholtz est facilement identifiable dans le quart inférieur droit avec  $\text{Re}(\alpha) = 3.24$  et  $\text{Im}(\alpha) = -3.46$ .

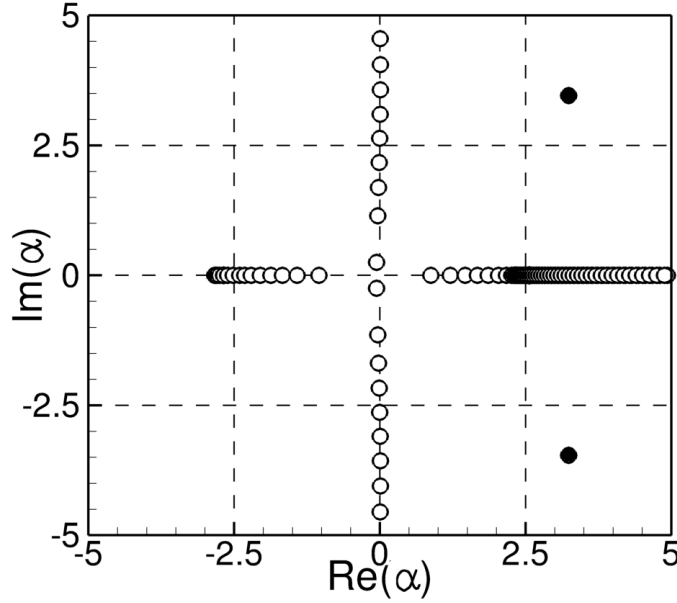


FIGURE 3.6 : Spectre de stabilité obtenu pour  $m = 0$  et  $St = 0.36$  à l'abscisse initiale  $x/d = 0.3$ ; (o) valeurs propres du système; (•) modes de Kelvin-Helmholtz

À cette valeur propre  $\alpha$  est associé un vecteur propre  $\hat{\mathbf{q}} = [\hat{u}_x, \hat{u}_r, \hat{u}_\theta, \hat{p}, \hat{p}]^T$  dont les composantes sont présentées sur la Fig. 3.7 après normalisation par le maximum d'amplitude de la perturbation de vitesse axiale  $\hat{u}_x$ . Comme attendu, les perturbations sont localisées principalement autour de la couche de mélange en  $r/d = 0.5$  et s'étendent rarement à plus de  $r/d = 1.5$ . À noter que la composante  $\hat{u}_\theta$  est nulle pour les modes axisymétriques et n'a donc pas été représentée.

Ce couple  $(\alpha, \hat{\mathbf{q}})$  permet l'initialisation du système PSE. Le calcul est alors effectué par pas successif  $\Delta x = 0.1$  dans la direction axiale. Pour rappel, les dérivées axiales sont calculées par un schéma d'Euler implicite d'ordre un. Les dérivées radiales sont quant à elles obtenues en utilisant le schéma compact proposé par Gamet *et al.* (1999). La parabolicité du système est assurée en utilisant le critère permettant de conserver une fraction maximale du terme  $\partial \hat{p} / \partial x$ , similaire au travaux de Vigneron *et al.* (1978) comme mentionné dans le chapitre 2.2. La convergence sur le nombre d'onde axial est effectuée par une méthode de Newton-Raphson basée sur l'annulation de la condition de normalisation (2.45).

Les contours de la partie réelle et de l'amplitude des fluctuations de pression, prévus par les PSE pour le mode  $m = 0$  et  $St = 0.36$ , sont présentés sur la Fig. 3.8. Le paquet d'ondes, qui apparaît clairement, est d'abord amplifié avant d'être amorti. D'après les

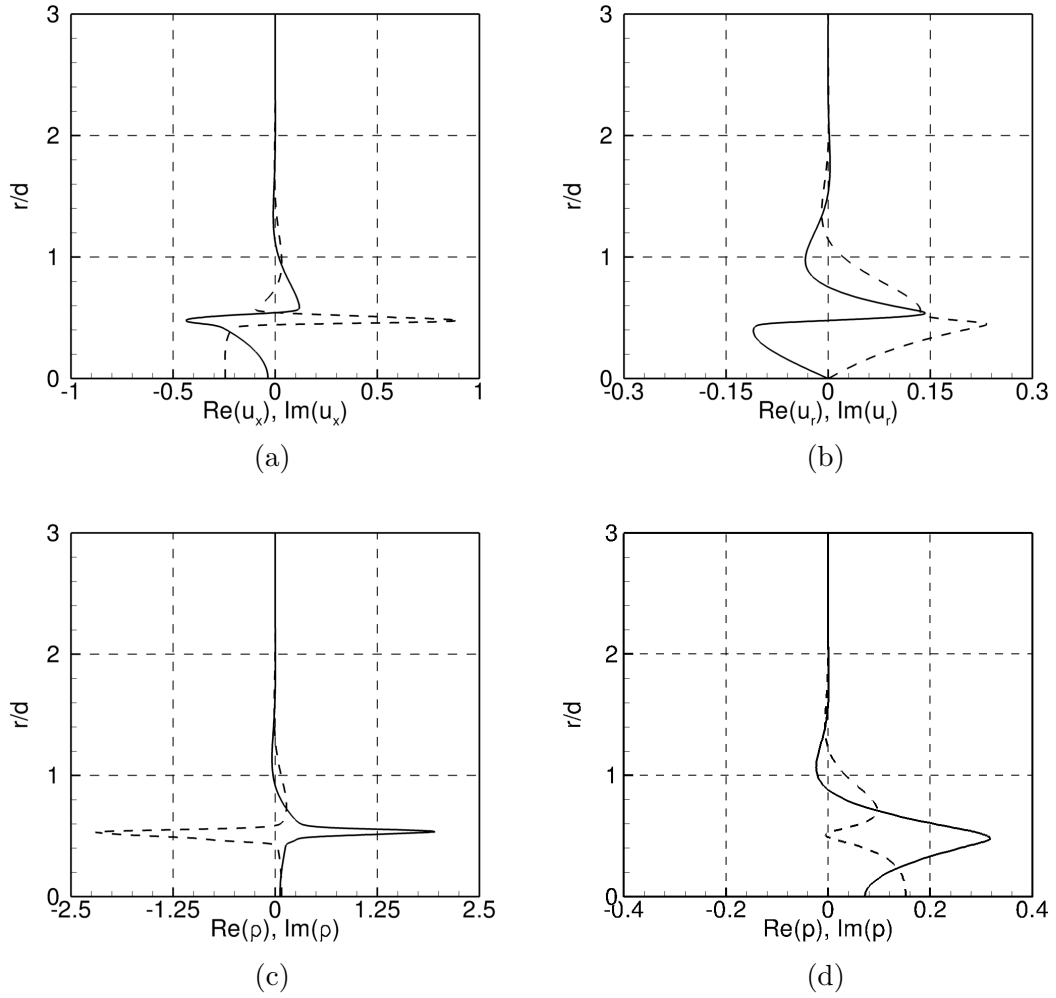


FIGURE 3.7 : Fonctions propres issues de l'analyse de stabilité locale pour  $m = 0$  et  $St = 0.36$  à la station initiale  $x/d = 0.3$ ; (—) Partie réelle; (- -) Partie imaginaire.

mesures et la simulation LES, le début de la phase d'amortissement du paquet d'ondes correspond à la fin du cône potentiel, localisée à  $x/d = 5.4$ .

Cette démarche a ensuite été étendue aux deux premiers modes azimutaux  $m = 1$  et  $m = 2$ . L'amplitude de pression des modes  $m = 0, 1$  et  $2$  à  $r/d = 0.5$  est rapportée sur la Fig. 3.9. Pour rappel, l'amplitude maximale de la perturbation de vitesse axiale est unitaire à la station initiale  $x/d = 0.3$  pour tous les modes.

Le mode axisymétrique  $m = 0$  est le mode le plus amplifié, bien que l'amplitude des fluctuations de pression du premier mode azimutal  $m = 1$  reste significative. En revanche, l'amplitude des fluctuations de pression du second mode azimutal  $m = 2$  est relativement faible. Pour cette raison, la contribution des modes azimutaux  $m \geq 2$  est généralement négligée dans les analyses de stabilité des jets avec les PSE.

De façon à pouvoir comparer les mesures et les résultats obtenus par la simulation LES avec les prévisions des PSE, une large gamme fréquentielle a été étudiée, soit les nombres de Strouhal suivants : 0.12, 0.18, 0.24, 0.30, 0.36, 0.42, 0.60 et 0.78 pour le

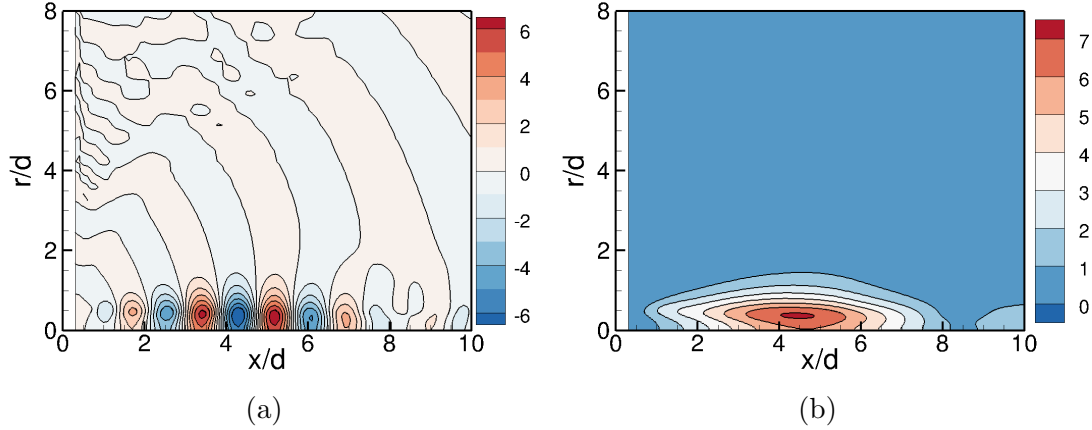


FIGURE 3.8 : Contours de la partie réelle (a) et de l'amplitude (b) des fluctuations de pression obtenus par les PSE pour le mode  $m = 0$  et  $St = 0.36$ .

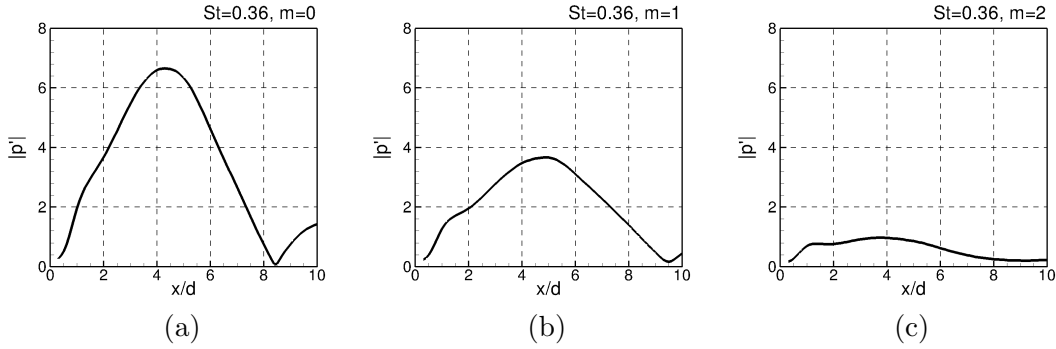


FIGURE 3.9 : Amplitude des fluctuations de pression à  $r/d = 0.5$  pour les modes  $m = 0$  (a),  $m = 1$  (b) et  $m = 2$  (c).

mode axisymétrique  $m = 0$  et le premier mode azimutal  $m = 1$ . Les amplitudes des fluctuations de pression à  $r/d = 0.5$  pour l'ensemble de ces fréquences sont tracées sur la Fig. 3.10. Seules les fréquences  $St = 0.36$  et  $St = 0.42$  sont mises en avant par l'utilisation de symboles, étant donné qu'elles sont les plus amplifiées. Dans le cas du jet étudié, les instabilités les plus amplifiées sont donc axisymétriques ( $m = 0$ ) sur une bande fréquentielle située autour de  $St = 0.40$ .

### 3.2.3 Comparaison des résultats PSE et LES avec les mesures

Une fois l'analyse PSE linéaire effectuée, il est possible de comparer en champ proche les résultats obtenus par PSE et par LES avec les résultats expérimentaux. La position radiale la plus proche de l'axe du jet pour laquelle les mesures sont disponibles est située à  $r/d = 1.5$ . Ainsi, les Fig. 3.11 et Fig. 3.12 comparent l'évolution axiale des amplitudes des fluctuations de pression à  $r/d = 1.5$  à plusieurs fréquences, et ce, pour le mode axisymétrique ( $m = 0$ ) et le premier mode azimutal ( $m = 1$ ) respectivement.

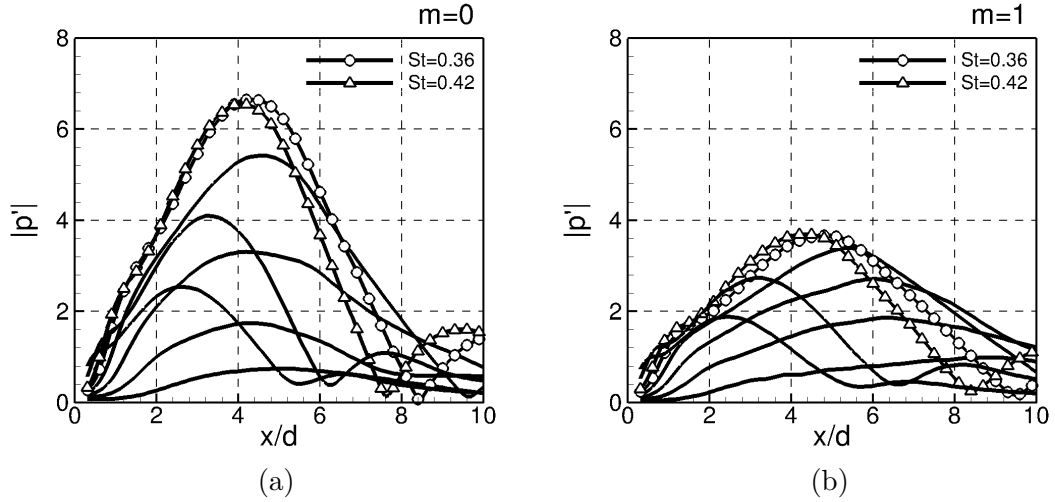


FIGURE 3.10 : Amplitudes des fluctuations de pression à  $r/d = 0.5$  du mode axisymétrique (a) et du premier mode azimutal (b) sur une large gamme de fréquence ;  
( $\circ$ )  $St = 0.36$  ; ( $\triangle$ )  $St = 0.42$ .

Par construction, les résultats PSE n'ont pas une amplitude absolue puisque l'analyse menée jusqu'alors est linéaire. En conséquence, les amplitudes PSE ont été calibrées par rapport aux valeurs expérimentales au point  $x/d = 2.0$ .

De façon remarquable, les données LES et les mesures présentent un très bon accord jusqu'à  $x/d = 8.0$ , malgré une légère surestimation par la LES des niveaux de pression pour  $x/d \leq 4$ . Une explication possible pourrait être la transition d'un état laminaire vers un état turbulent de la couche de cisaillement qui apparaît en sortie de tuyère sur les simulations, contrairement au jet expérimental qui est entièrement turbulent.

Les résultats PSE présentent également un accord correct sur toute la phase de croissance et sur l'amplitude maximale des perturbations lorsque  $St < 0.6$  pour  $m = 0$  et  $m = 1$ . Toutefois, des différences apparaissent dans la phase d'amortissement. En effet, une forte décroissance est prévue en aval du cône potentiel par les PSE alors que les mesures et la simulation LES montrent des niveaux de pression constants ou en légère décroissance. Ces écarts sont d'autant plus marqués avec l'augmentation de la fréquence. Pour des fréquences  $St \geq 0.6$ , les résultats PSE deviennent fortement discutables. Des résultats similaires ont été obtenus par [Gudmundsson et Colonius \(2011\)](#) dans le cas d'un jet froid subsonique à  $M_j = 0.5$  et d'un jet chaud subsonique à  $M_j = 0.9$  proche de notre configuration. Toutefois, [Gudmundsson et Colonius \(2011\)](#) ont montré qu'il était possible d'améliorer significativement l'accord entre les prévisions PSE et LES en champ proche par une Décomposition Orthogonale aux valeurs Propres (POD) des données LES et des mesures. Des résultats similaires ont également été obtenus par [Brazier et al. \(2015\)](#). La POD est une technique d'analyse statistique qui permet d'extraire le caractère dominant d'un ensemble de données. Cette méthode consiste à déterminer une base de modes propres orthogonaux, optimale d'un point de vue énergétique, à partir

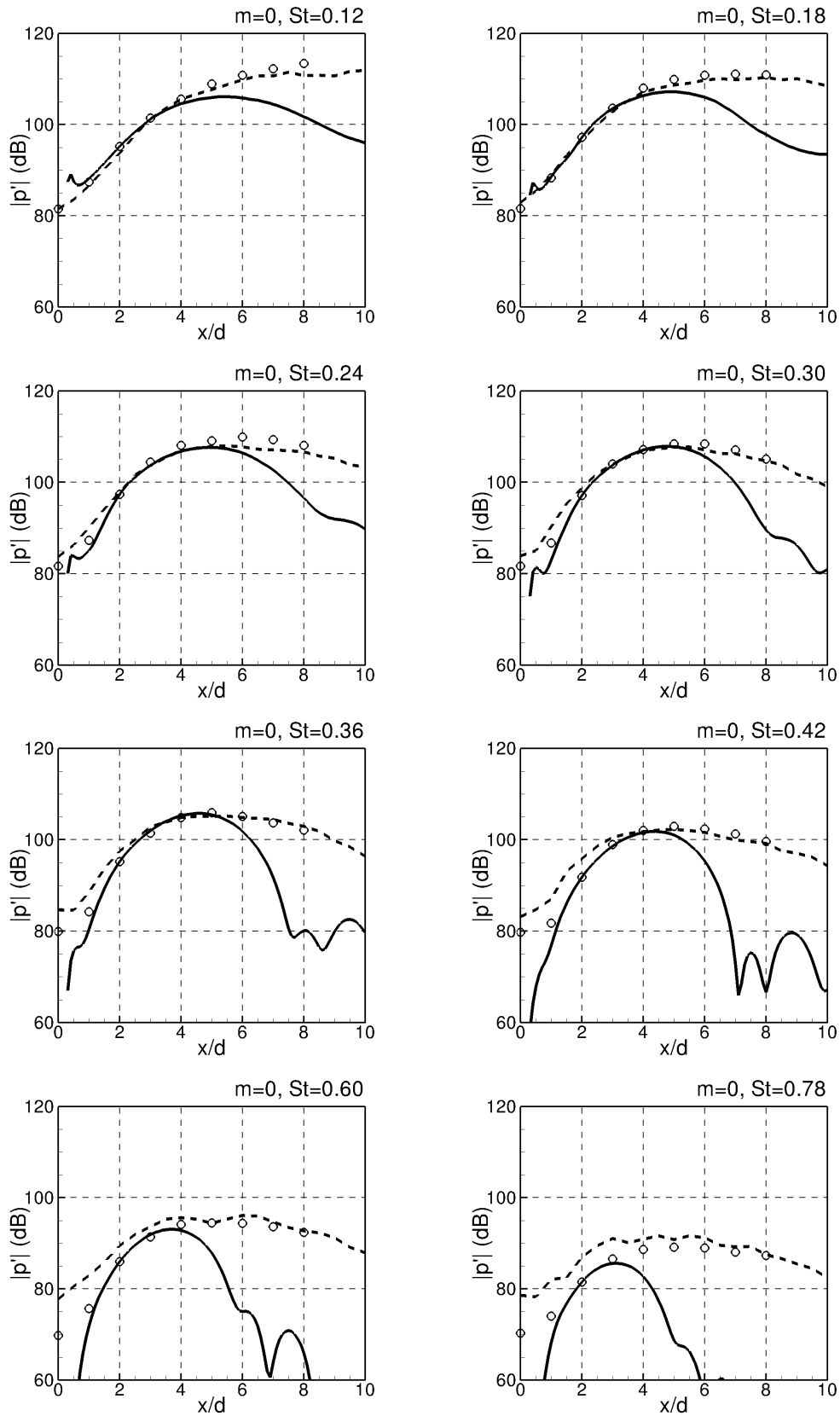


FIGURE 3.11 : Comparaison de l'amplitude des fluctuations de pression à  $r/d = 1.5$  pour le mode  $m = 0$  à différents nombres de Strouhal; (o) Données expérimentales; (- - -) Résultats LES; (—) Prévisions PSE.

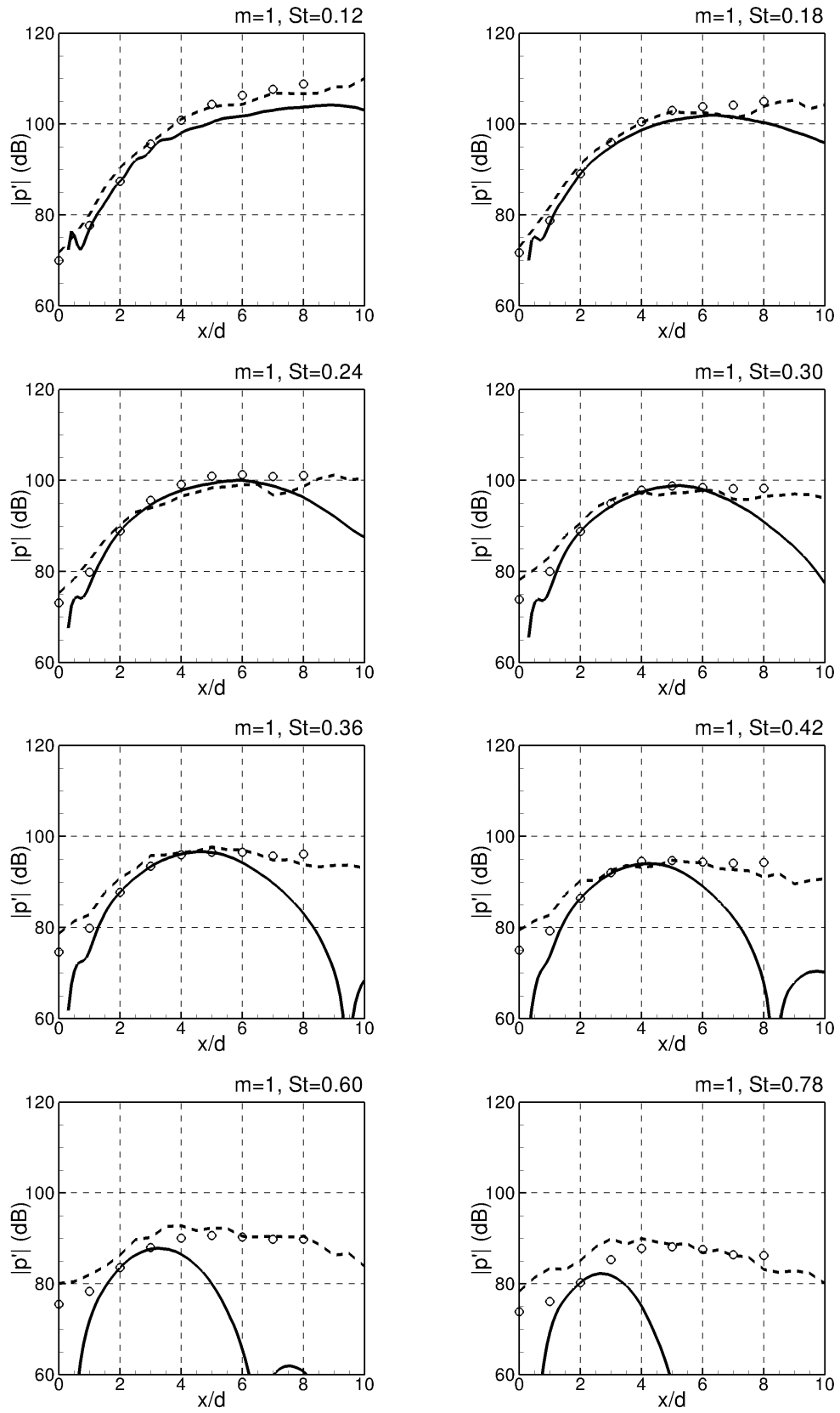


FIGURE 3.12 : Comparaison de l'amplitude des fluctuations de pression à  $r/d = 1.5$  pour le mode  $m = 1$  à différents nombres de Strouhal; ( $\circ$ ) Données expérimentales; (- - -) Résultats LES; (—) Prévisions PSE.



de la densité interspectrale de puissance de deux signaux. Il est généralement admis que les fonctions propres POD sont intimement liées aux structures cohérentes, même si la nature exacte de cette relation reste sujette à débat. En effet, [Lumley \(1967\)](#) qui a introduit l'utilisation de la POD en turbulence, a noté que le premier mode POD représente les structures cohérentes seulement s'il contient une part dominante de l'énergie des fluctuations. Dans le cas des jets, où la contribution des structures cohérentes à l'énergie totale de l'écoulement est significative, l'assimilation du premier mode POD aux structures cohérentes est légitime. En comparant les résultats PSE avec le premier mode POD du champ de pression obtenu expérimentalement, [Gudmundsson et Colonius \(2011\)](#) ont montré que les PSE sont non seulement capables de capter efficacement la phase de croissance des instabilités mais également la phase d'amortissement. Cependant, cette technique d'analyse n'a pas été appliquée dans le cadre de ces travaux de thèse.

Une comparaison entre les résultats PSE et LES a également été effectuée au niveau de la couche de mélange à  $r/d = 0.5$ , et est représentée sur la Fig. 3.13. Malheureusement, aucune mesure n'est disponible à cette position radiale. De plus, par souci de visibilité, seules les fréquences  $St = 0.18, 0.42$  et  $0.60$  pour les modes  $m = 0$  et  $m = 1$  sont représentées sur cette figure. Pour le mode axisymétrique  $m = 0$ , les tendances sont similaires à celles observées en  $r/d = 1.5$ , avec un accord convenable dans la phase de croissance des perturbations et des écarts qui se font ressentir dans la phase d'amortissement. Pour le premier mode azimutal  $m = 1$ , en revanche, la phase de décroissance semble être mieux résolue à basse fréquence. Une fois de plus, une analyse POD des données LES permettrait probablement d'améliorer la concordance entre les résultats PSE et LES dans la phase d'amortissement des instabilités.

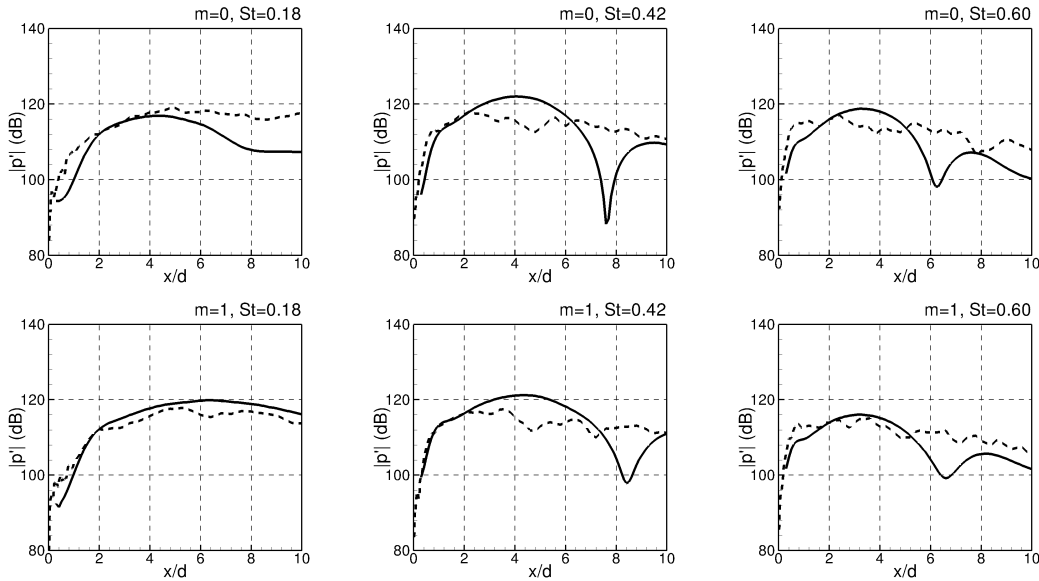


FIGURE 3.13 : Comparaison de l'amplitude des fluctuations de pression à  $r/d = 0.5$  pour les modes  $m = 0$  et  $m = 1$  à différents nombres de Strouhal;  
(—) PSE linéaires; (---) LES.

### 3.3 Propagation en champ lointain des perturbations de pression

#### 3.3.1 Méthode de propagation par surface de Kirchhoff

Comme souligné par [Cheung et al. \(2007\)](#), bien que les fluctuations hydrodynamiques des jets soient correctement capturées par l'approche PSE, cette dernière ne permet pas d'évaluer directement le rayonnement acoustique associé aux ondes d'instabilité. Toutefois, [Suzuki et Colonius \(2006\)](#) ont montré expérimentalement qu'il existe une région, appelée la zone hydrodynamique linéaire, située juste en dehors du jet, où le champ de pression évanescent associé aux ondes d'instabilité hydrodynamique domine encore sur l'acoustique. En positionnant une surface de Kirchhoff cylindrique dans cette région, [Balakumar \(1998\)](#) a montré qu'il était possible de reconstruire le rayonnement acoustique en champ lointain à partir de la solution PSE obtenue en champ proche, dans le cas des jets supersoniques. Cette démarche a également été appliquée dans le cas d'un jet subsonique double-flux par [Léon et Brazier \(2013\)](#).

La méthode consiste à résoudre les équations d'Euler linéarisées en coordonnées cylindriques dans un milieu au repos pour la perturbation spatiale  $\tilde{\mathbf{q}}_{m,n}(x, r)$  :

$$-in\omega\tilde{u}_{x_{m,n}} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \tilde{p}_{m,n}}{\partial x} \quad (3.2a)$$

$$-in\omega\tilde{u}_{r_{m,n}} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \tilde{p}_{m,n}}{\partial r} \quad (3.2b)$$

$$-in\omega\tilde{u}_{\theta_{m,n}} = -\frac{im}{r} \frac{1}{\bar{\rho}} \tilde{p}_{m,n} \quad (3.2c)$$

$$-in\omega\tilde{p}_{m,n} + \frac{1}{M_j^2} \left( \frac{\tilde{u}_{r_{m,n}}}{r} + \frac{\partial \tilde{u}_{r_{m,n}}}{\partial r} + \frac{im}{r} \tilde{u}_{\theta_{m,n}} + \frac{\tilde{u}_{x_{m,n}}}{r} + \frac{\partial \tilde{u}_{r_{m,n}}}{\partial r} \right) = 0 \quad (3.2d)$$

Bien que  $n$  soit connu du fait que l'approche est ici linéaire, le formalisme développé dans le chapitre 2.2 est conservé. L'élimination des composantes de vitesse conduit à une équation de propagation des ondes pour la perturbation spatiale de pression :

$$\frac{\partial^2 \tilde{p}_{m,n}}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \tilde{p}_{m,n}}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{p}_{m,n}}{\partial r} + \left( \bar{\rho} M_j^2 n^2 \omega^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) \tilde{p}_{m,n} = 0 \quad (3.3)$$

La décroissance des fluctuations de pression en champ lointain, ainsi que le raccord du champ acoustique propagé à la solution hydrodynamique PSE sont imposés sur les frontières du domaine :

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \tilde{p}_{m,n} = 0 \quad (3.4a)$$

$$\tilde{p}_{m,n}(x, r_K) = \tilde{p}_{m,n}^{(0)}(x) \quad (3.4b)$$

avec  $r_K$  la position radiale de la surface de Kirchhoff située dans la zone hydrodynamique linéaire et  $\tilde{p}_{m,n}^{(0)}$  la transformée de Fourier axiale de la perturbation de pression le long de l'axe  $r = r_K$  obtenue à partir du calcul PSE. L'équation d'onde (3.3) est résolue par transformée de Fourier et la solution s'exprime au moyen des fonctions de Hankel du premier type  $H_m^{(1)}$  d'ordre  $m$  :

$$\tilde{p}_{m,n}(x, r) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{p}_{m,n}^{(0)}(\eta) \frac{H_m^{(1)}(ir\lambda_K)}{H_m^{(1)}(ir_K\lambda_K)} e^{i\eta x} d\eta, \quad (3.5)$$

$$\text{où } \lambda_K^2 = \rho_{\infty} M_j^2 n^2 \omega^2 - \eta^2 \text{ avec } \text{Re}(\lambda_K) > 0 \quad (3.6)$$

Dès lors, il est possible de reconstruire les champs acoustiques proche et lointain associés à un mode  $(m, n)$ . Cette méthode a été validée et étendue à des surfaces de Kirchhoff coniques par Léon (2012). Seules des surfaces cylindriques seront utilisées dans la suite de ce manuscrit. La perturbation de pression complète est reconstruite en dernier lieu à partir de la décomposition modale :

$$p'(x, r, \theta, t) = \tilde{p}_{m,n}(x, r) \exp [i (m\theta - n\omega t)]. \quad (3.7)$$

### 3.3.2 Comparaison des directivités acoustiques

Puisque l'étendue radiale de la zone hydrodynamique linéaire varie d'un mode à l'autre, une surface de Kirchhoff cylindrique doit être déterminée pour chacun des modes pour pouvoir propager la solution PSE en champ lointain.

De par la faible divergence du jet, une surface cylindrique peut ne pas être adaptée à partir d'une certaine position axiale. Ainsi, différentes positions radiales  $r_K$  des surfaces de Kirchhoff ont été étudiées pour chacun des modes, dans le but de déterminer les solutions propagées qui concordent le mieux avec les résultats PSE. Avec l'augmentation de la fréquence, les perturbations sont amorties plus rapidement en dehors du jet et la surface de Kirchhoff se rapproche inexorablement du jet. Toutefois, une limite à  $r_K/d \geq 1.0$  est imposée pour s'assurer que l'écoulement de base est au repos et ainsi garantir la validité de la méthode. Sur la Fig. 3.14, le raccord entre les résultats PSE et la solution acoustique propagée à l'abscisse  $x/d = 3.0$  est tracé pour trois fréquences du mode axisymétrique ( $m = 0$ ).

Une fois la position radiale des surfaces de Kirchhoff déterminée pour chacun des modes, les résultats PSE sont propagés en champ lointain. Une comparaison des diagrammes de directivité obtenus à  $r/d = 75$  est représentée sur la Fig. 3.15 où le niveau maximal de la pression acoustique obtenu par PSE a été calibré sur les résultats expérimentaux. Un rayonnement des modes instables sous forme de lobe est clairement perçu avec une directivité marquée en aval du jet. De façon similaire aux résultats en champ proche, la solution LES est cohérente avec les mesures. À noter qu'une

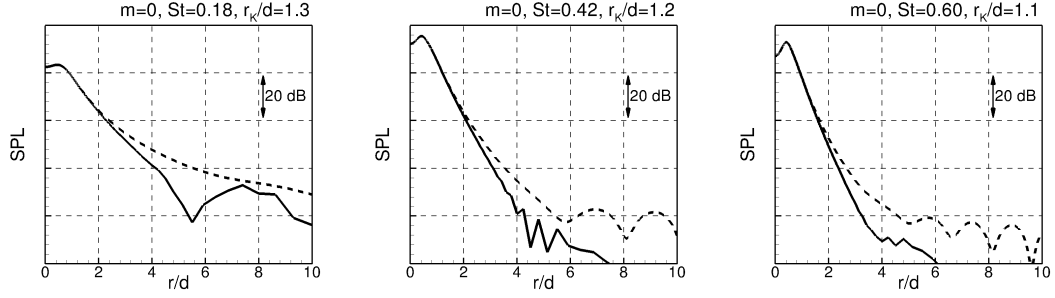


FIGURE 3.14 : Profil radial de la perturbation de pression en champ proche à  $x/d = 3.0$  ; PSE linéaire (—) ; Propagation acoustique (- - -).

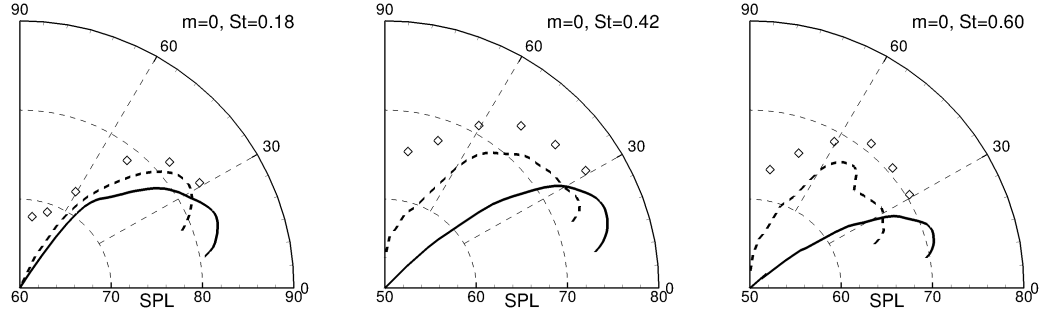


FIGURE 3.15 : Niveau de pression acoustique propagé en champ lointain à  $r/d = 75$  issu du calcul PSE linéaire (—), de la simulation LES (- - -) et des mesures ( $\diamond$ ).

décomposition azimutale des mesures en champ lointain est impossible sur cette configuration. Ainsi, contrairement aux résultats LES et PSE où seul le mode axisymétrique ( $m = 0$ ) est représenté, les mesures contiennent l'ensemble des modes azimutaux. Pour les fréquences  $St = 0.18$  et  $St = 0.42$ , la solution PSE semble sous-estimer d'environ  $5^\circ$  l'angle de directivité correspondant à la pression acoustique maximale. De plus, comme attendu, les PSE ne permettent pas de capturer le rayonnement perpendiculaire à l'axe du jet associé aux petites échelles de la turbulence. Des écarts similaires ont été observés par [Sinha et al. \(2014\)](#) dans le cas d'un jet chaud supersonique à  $M_j = 1.5$ . Une fois de plus, en réalisant un filtrage POD de la solution LES, les résultats ont été grandement améliorés. En revanche, à la fréquence  $St = 0.60$ , les écarts sont significatifs avec un changement brutal pour les résultats expérimentaux et LES de l'angle de directivité qui passe de  $30^\circ$  à  $60^\circ$ . L'origine physique de ce phénomène n'a pu être déterminée dans les présents travaux.

### 3.4 Étude de l'impact des interactions non linéaires avec les PSE

#### 3.4.1 Détermination de l'amplitude initiale réelle des modes

Avec pour objectif d'analyser si les interactions entre les ondes d'instabilité ont un impact sur leur développement, il est nécessaire de réaliser une initialisation des modes à des amplitudes représentatives de l'écoulement réel. Pour rappel, dans la modélisation PSE, l'amplitude initiale d'un mode  $(m, n)$  est définie comme le maximum d'amplitude de la perturbation de vitesse axiale  $\hat{u}_{x_{m,n}}$ , extraite de la solution de stabilité locale en  $x_0$ . Ce maximum est généralement localisé à proximité de la couche de mélange située en  $r/d = 0.5$ , comme vu précédemment sur les fonctions propres de la Fig. 3.7. Rigoureusement, il serait nécessaire d'extraire les amplitudes initiales des modes directement des mesures. Malheureusement, les mesures les plus proches du jet sont situées à  $r/d = 1.5$ , région où les vecteurs propres obtenus par stabilité locale tendent à s'annuler. Au vu de l'accord entre les résultats LES et les mesures, le choix a été fait d'extraire les amplitudes initiales à partir des données LES obtenues à  $r/d = 0.5$ . Il faut cependant garder à l'esprit la légère surestimation par le calcul des niveaux de pression à proximité de la sortie de la tuyère. Les niveaux de pression sont ensuite adimensionnés en suivant les conventions présentées dans le chapitre 2.1. Les fonctions propres obtenues par stabilité locale permettent alors de déterminer l'amplitude de la perturbation de vitesse axiale  $\hat{u}_{x_{m,n}}$  en  $x/d = 0.3$  et  $r/d = 0.5$ , puis l'amplitude initiale de chacun des modes. Un récapitulatif des niveaux de pression extraits des données LES en  $r/d = 0.5$  et des amplitudes initiales équivalentes est proposé dans les Tab. 3.2 et 3.3, pour le mode axisymétrique ( $m = 0$ ) et le premier mode azimutal ( $m = 1$ ), respectivement.

TABLE 3.2 : Amplitudes des niveaux de pression extraits des données LES en  $r/d = 0.5$  et amplitudes initiales équivalentes pour le mode axisymétrique ( $m = 0$ ).

$St$	0.12	0.18	0.24	0.30	0.36	0.42	0.60	0.78
$ p' _{m=0}$ (dB)	96.2	97.5	98.1	99.5	100.9	103.6	108.3	109.8
$\varepsilon_{0,n}$ ( $\times 10^{-5}$ )	11.27	8.00	6.23	5.83	5.64	6.29	6.27	5.32

TABLE 3.3 : Amplitudes des niveaux de pression extraits des données LES en  $r/d = 0.5$  et amplitudes initiales équivalentes pour le premier mode azimutal ( $m = 1$ ).

$St$	0.12	0.18	0.24	0.30	0.36	0.42	0.60	0.78
$ p' _{m=1}$ (dB)	96.3	97.1	97.5	99.6	99.5	99.8	106.0	108.4
$\varepsilon_{1,n}$ ( $\times 10^{-5}$ )	22.07	12.53	8.32	7.76	5.53	4.49	5.72	4.93

De façon similaire aux résultats obtenus par [Rodríguez \*et al.\* \(2011\)](#), l'ordre de grandeur de l'amplitude initiale des modes reste à peu près le même pour un grand nombre de modes.

### 3.4.2 Effet de l'amplitude initiale des modes

Dans un premier temps, il est important de vérifier si la prise en compte des interactions modales dans le modèle PSE non linéaire peut altérer l'évolution d'un ou plusieurs modes. Pour cela, une analyse de l'effet de l'amplitude initiale des modes est réalisée, où le but n'est pas de fournir une représentation exacte du jet, mais plutôt de juger des capacités du modèle. En premier lieu, l'effet de la phase initiale des modes n'est pas considéré de sorte que  $\phi_{m,n} = 0^\circ$  pour tous les modes.

Quatre harmoniques fréquentielles pour les trois modes azimutaux  $m = 0$  et  $m = \pm 1$  sont considérées, pour des fréquences allant de  $St = 0.20$  à  $St = 0.80$  par pas de  $\Delta St = 0.20$  ( $n_{max} = 4$ ). Puisque aucune direction azimutale n'est *a priori* privilégiée, l'évolution du mode  $m = -1$  est déterminée à partir des relations de symétrie présentées dans le chapitre 2.2. Ainsi, seuls les modes  $m = 0$  et  $m = 1$  seront mentionnés dans la suite. Pour simplifier l'analyse, tous les modes sont initialisés à la même amplitude initiale, pour trois conditions différentes :  $1 \times 10^{-5}$ ,  $1 \times 10^{-4}$  et  $1 \times 10^{-3}$ . Les résultats sont présentés sur la Fig. 3.16 où le facteur  $N$  est utilisé pour comparer l'évolution axiale des modes,

$$N = \ln \left( \frac{A(x)}{A(x_0)} \right), \quad (3.8)$$

avec  $A(x) = \left[ \int_0^\infty (|\hat{u}_x|^2 + |\hat{u}_r|^2 + |\hat{u}_\theta|^2) dr \right]^{1/2}$  la moyenne quadratique des fluctuations de vitesse. Les effets non linéaires sont mis en évidence dès lors qu'un écart apparaît entre les résultats linéaires et non linéaires.

Pour de faibles amplitudes initiales, aucun écart n'est observé entre les résultats issus de simulations linéaires et non linéaires. Les interactions modales n'ont pas d'impact sur l'évolution des ondes d'instabilité. Pour des amplitudes initiales supérieures en revanche, des différences apparaissent. À titre d'exemple, pour  $\varepsilon_{m,n} = 1 \times 10^{-3}$ , de petits écarts sont visibles pour l'évolution des modes  $(0, 2)$ ,  $(0, 3)$ ,  $(1, 2)$  et  $(1, 4)$ , tandis que l'impact sur l'évolution des modes  $(0, 1)$ ,  $(0, 4)$  et  $(1, 1)$  est plus marqué. En revanche, le mode  $(1, 3)$  est inchangé sous ces conditions spécifiques. Toutefois, l'impact des effets non linéaires se fait majoritairement ressentir en aval du cône potentiel. En effet, la phase de croissance des perturbations reste linéaire, même pour des amplitudes initiales importantes. Ces résultats peuvent expliquer en partie la pertinence des prévisions obtenues par PSE linéaires en amont du cône potentiel, ainsi que les écarts observés en aval.

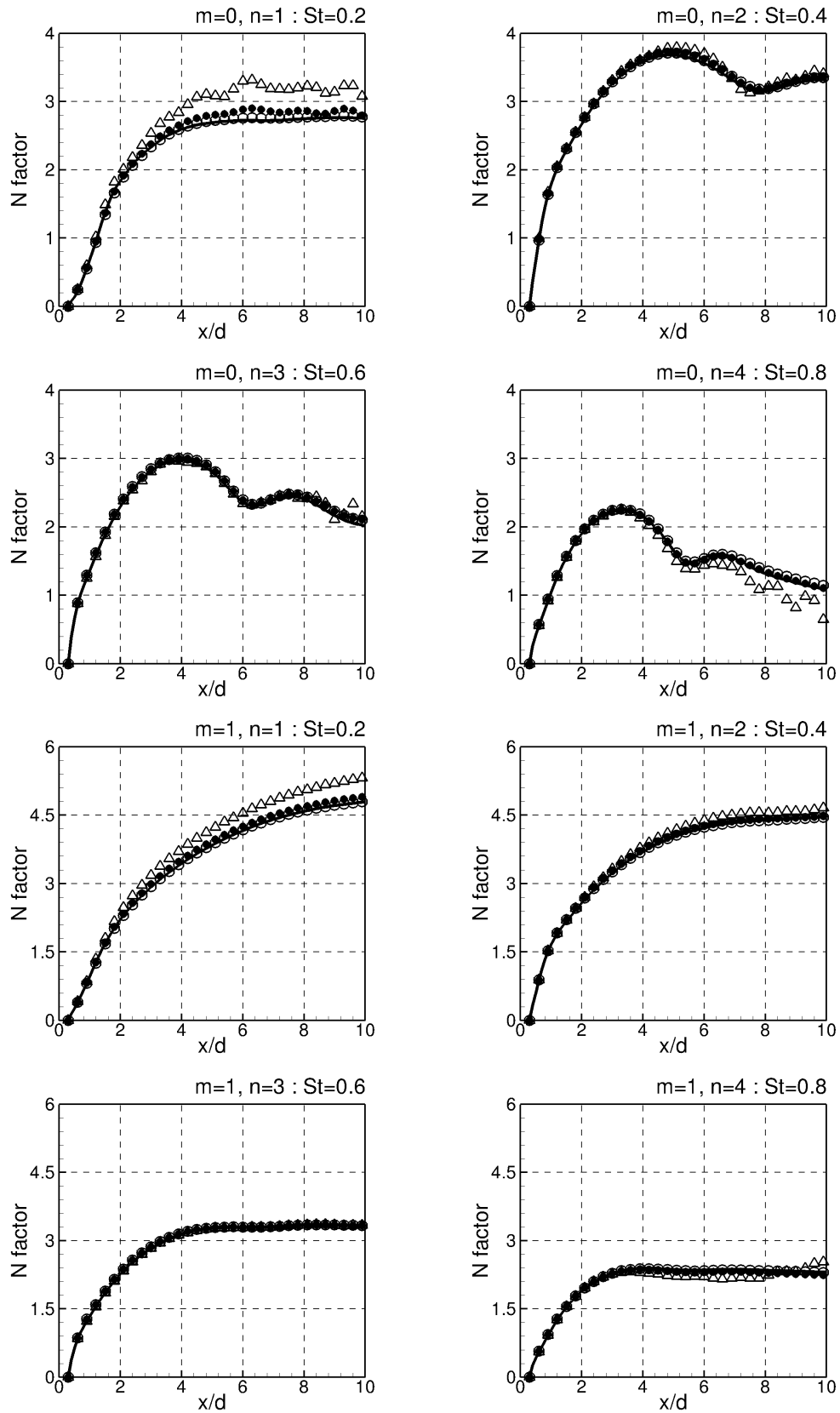


FIGURE 3.16 : Comparaison de l'évolution axiale du facteur N obtenue par PSE non linéaires pour différentes amplitudes initiales  $\varepsilon_{m,n} = 10^{-5}$  ( $\circ$ );  $10^{-4}$  ( $\bullet$ );  $10^{-3}$  ( $\triangle$ ); PSE linéaires (—).

### 3.4.3 Validation du calcul des Termes Non Linéaires

Le calcul des termes non linéaires  $\mathbf{TNL}_{m,n}$  peut également être vérifié sur le cas d'étude précédent. En effet, comme mentionné dans le chapitre 2.3, deux approches sont disponibles pour calculer ces termes : la première est analytique, tandis que la seconde fait appel à l'utilisation de transformées de Fourier rapides. Puisque le mode (0,1) voit sa dynamique significativement altérée par les interactions non linéaires, une comparaison de la distribution radiale des parties réelles et imaginaires des termes non linéaires  $TNL_{0,1}^{(i)}$  à l'abscisse  $x/d = 6.0$  est représentée sur la Fig. 3.17. L'exposant  $(i)$  se réfère respectivement, à l'équation de continuité, aux équations de quantité de mouvement axiale, radiale, azimutale et à l'équation de l'énergie. Puisque le mode (0,1) est axisymétrique, le terme  $TNL_{0,1}^{(4)}$  est identiquement nul. Bien que les termes d'ordre supérieur à trois soient négligés dans l'approche analytique, la correspondance entre les résultats est excellente, et ce pour tous les modes à toutes les abscisses  $x/d$ , ce qui permet de valider l'évaluation des termes non linéaires.

Par ailleurs, il est important de souligner que les variations brutales de ces fonctions ne sont pas issues d'une discrétisation radiale trop lâche mais bien d'origine physique. En effet, seulement un point sur trois est représenté par les symboles sur la Fig. 3.17. Un raffinement du maillage n'altère que peu l'évaluation de ces termes. Comme souligné dans le chapitre 2.3, si les schémas numériques de type collocation spectrale sont très efficaces en linéaire, les variations radiales brutales des  $\mathbf{TNL}_{m,n}$  imposent un maillage plus fin, sur une gamme radiale plus large, ce que ne permettent pas les maillages de collocation.

### 3.4.4 Analyse PSE non linéaires et impact des interactions modales

Dans le cadre de l'étude proposée, où l'amplitude initiale des modes est située entre  $\varepsilon_{m,n} = 1 \times 10^{-5}$  et  $\varepsilon_{m,n} = 1 \times 10^{-4}$ , les effets non linéaires semblent mineurs. Une simulation avec les amplitudes initiales réelles est toutefois nécessaire pour déterminer si les interactions non linéaires ont un impact sur l'évolution des modes sur cette configuration de jet naturel. Puisque les PSE non linéaires ne permettent de traiter que les interactions d'harmoniques fréquentielles, les fréquences issues des données LES ne peuvent être étudiées directement, conformément aux Tab 3.2 et 3.3. Une fois de plus, les fréquences allant de  $St = 0.20$  à  $St = 1.20$  sont analysées pour les trois modes azimutaux  $m = 0$  et  $m = \pm 1$ . Les amplitudes initiales sont alors interpolées à partir des résultats LES, comme synthétisé dans le Tab. 3.4 pour le mode  $m = 0$  et dans le Tab 3.5 pour le mode  $m = 1$ . Seule la fréquence  $St = 0.80$  a pour amplitude initiale celle de la fréquence  $St = 0.78$ .

La Fig. 3.18 représente l'évolution axiale des facteurs N. Les résultats obtenus sont très proches de la simulation précédente (Fig. 3.16) où tous les modes étaient initialisés



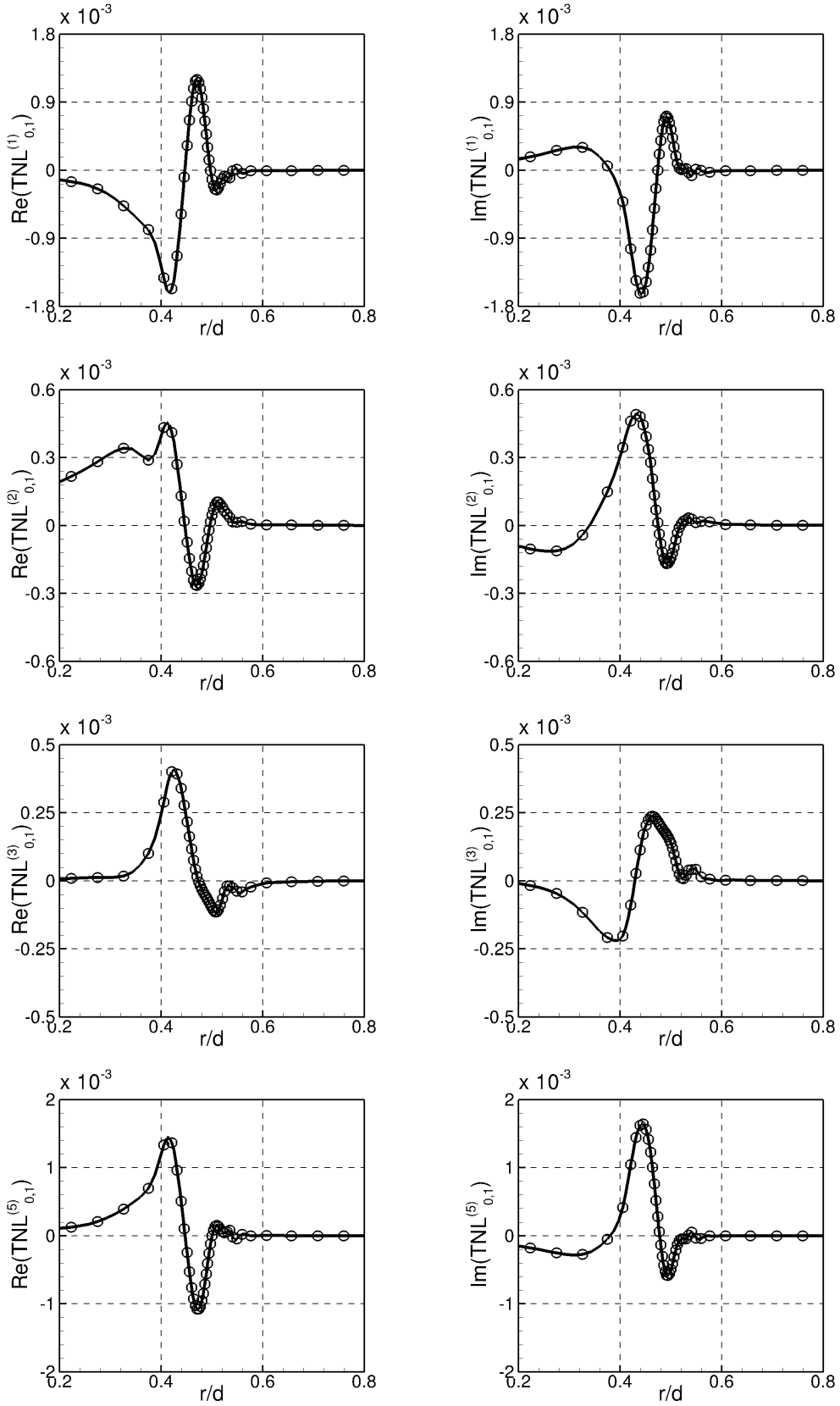


FIGURE 3.17 : Parties réelles et imaginaires des termes non linéaires  $TNL_{0,1}^{(1)}$ ,  $TNL_{0,1}^{(2)}$ ,  $TNL_{0,1}^{(3)}$  et  $TNL_{0,1}^{(5)}$  calculées par transformée de Fourier ( $\circ$ ) et analytiquement ( $—$ ) en  $x/d = 6.0$ .

TABLE 3.4 : Amplitudes initiales du mode axisymétrique ( $m = 0$ ) à différentes fréquences correspondant aux Fig. 3.18 et 3.19.

$\varepsilon_{0,1}(St = 0.20)$	$\varepsilon_{0,2}(St = 0.40)$	$\varepsilon_{0,3}(St = 0.60)$	$\varepsilon_{0,4}(St = 0.80)$
$7.41 \times 10^{-5}$	$6.07 \times 10^{-5}$	$6.27 \times 10^{-5}$	$5.32 \times 10^{-5}$

TABLE 3.5 : Amplitudes initiales du premier mode azimutal ( $m = 1$ ) à différentes fréquences correspondant aux Fig. 3.18 et 3.19.

$\varepsilon_{\pm 1,1}(St = 0.20)$	$\varepsilon_{\pm 1,2}(St = 0.40)$	$\varepsilon_{\pm 1,3}(St = 0.60)$	$\varepsilon_{\pm 1,4}(St = 0.80)$
$11.13 \times 10^{-5}$	$4.84 \times 10^{-5}$	$5.72 \times 10^{-5}$	$4.93 \times 10^{-5}$

à la même amplitude initiale  $\varepsilon_{m,n} = 1 \times 10^{-4}$ . Les effets non linéaires sont extrêmement faibles avec une légère modification de la dynamique des modes (0,1), (1,1), (1,2) et (1,4). De façon similaire aux résultats de [Rodríguez et al. \(2011\)](#), la majorité des modes semble avoir un comportement linéaire non seulement dans la zone d'amplification mais également dans la zone pleinement développée.

La Fig. 3.19 illustre l'évolution axiale des perturbations de pression en  $r/d = 0.5$  afin d'évaluer l'effet des interactions non linéaires sur les perturbations de pression. Conformément aux résultats précédents, bien qu'une légère variation des perturbations de pression soit observable, l'impact des interactions non linéaires peut légitimement être négligé dans le cas présent.

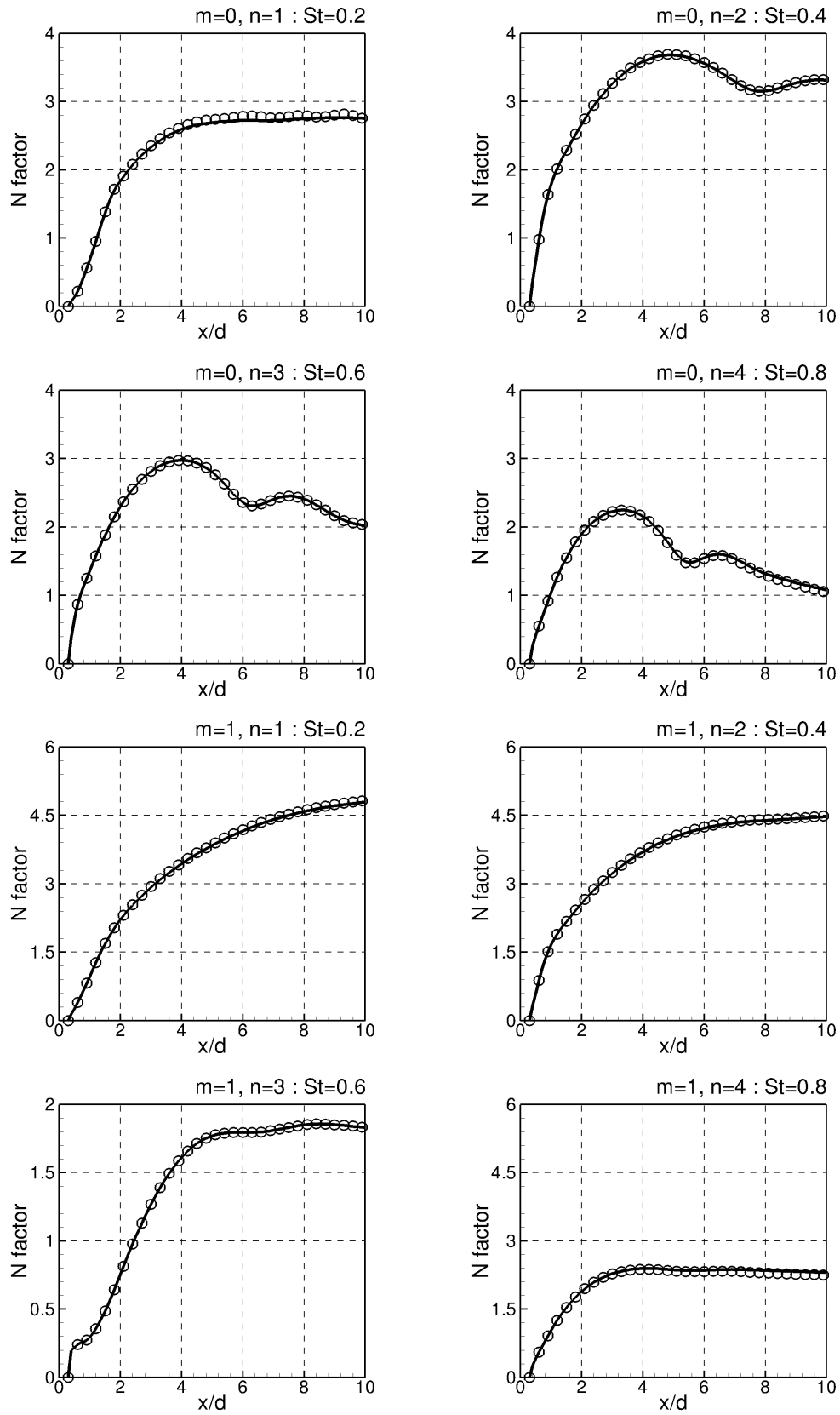


FIGURE 3.18 : Comparaison de l'évolution axiale du facteur N obtenue par PSE non linéaires (o) avec les amplitudes initiales issues du calcul LES ; PSE linéaires (—).

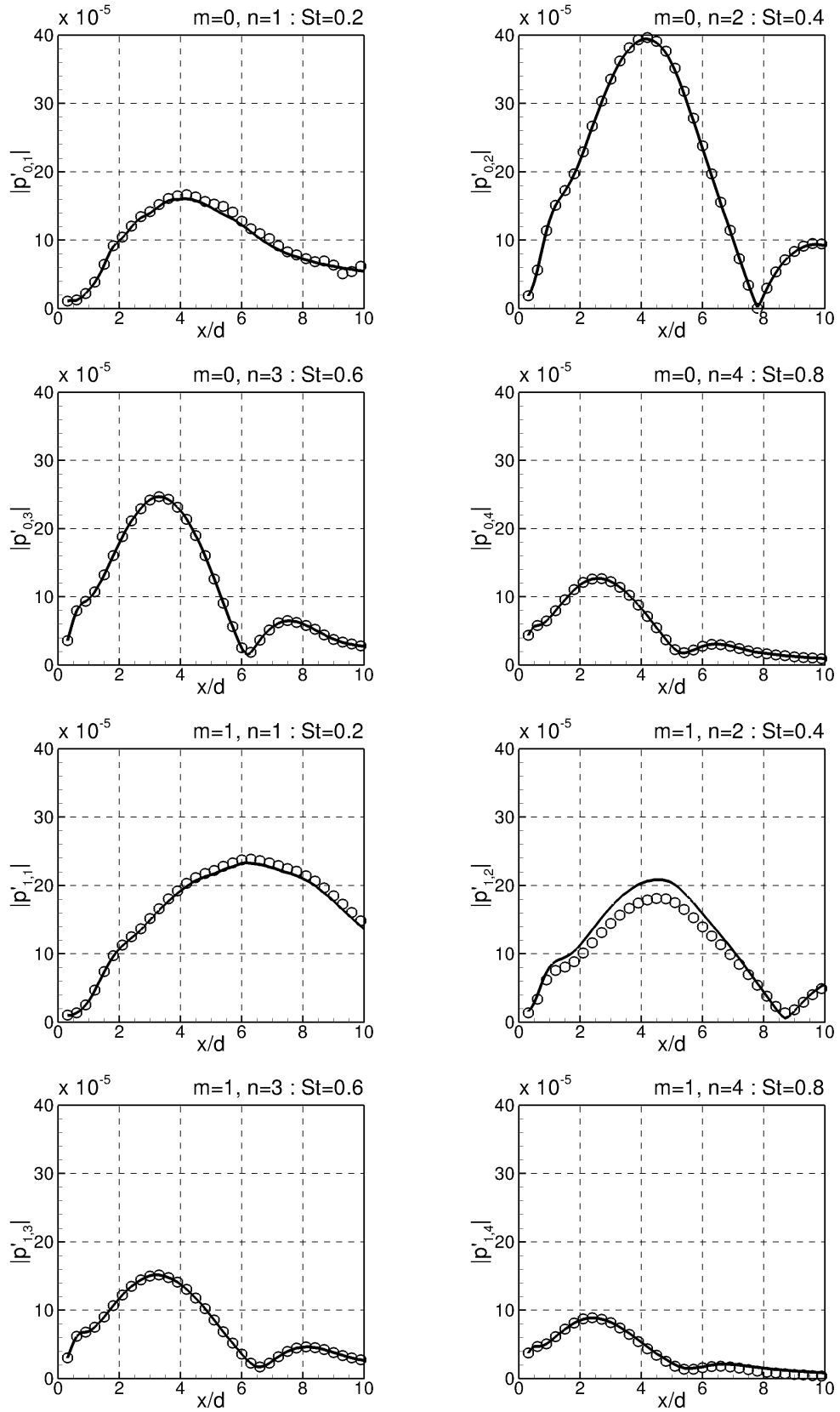


FIGURE 3.19 : Évolution axiale des amplitudes de pression en  $r/d = 0.5$  obtenues par PSE non linéaires ( $\circ$ ) avec les amplitudes initiales issues du calcul LES ; PSE linéaires ( $—$ ).

UNE application de l'approche PSE non linéaire est proposée dans ce chapitre dans le but d'évaluer si les interactions entre les ondes d'instabilité ont un impact sur la dynamique et le rayonnement acoustique des jets naturels. Pour cela, une configuration réaliste d'un jet chaud turbulent subsonique est choisie, pour laquelle une large base de données à la fois expérimentales et numériques a été constituée à l'ONERA suite à de nombreuses études. Plus particulièrement, une simulation LES réalisée par [Lorteau \(2015\)](#) est exposée, dont le champ moyen est utilisé comme champ de base pour l'analyse de stabilité après une procédure d'interpolation et de filtrage.

Dans un premier temps, une analyse PSE linéaire est menée afin de définir un cas de référence sans prise en compte des effets non linéaires. Par la même occasion, les résultats obtenus sont comparés aux mesures et aux données LES. En champ proche, un très bon accord est observé dans la zone d'amplification des ondes d'instabilité pour des fréquences  $St \leq 0.60$ . Des écarts apparaissent néanmoins dans la phase d'amortissement des perturbations. Une procédure de filtrage par POD des données LES serait nécessaire pour juger des capacités du modèle PSE dans cette zone de l'écoulement. Comme la solution PSE n'est valable que dans une région radiale restreinte, une méthode de propagation acoustique par surface de Kirchhoff cylindrique a été développée pour reconstruire le champ acoustique lointain. De façon similaire aux données en champ proche, les résultats obtenus concordent avec les mesures et les données LES pour des fréquences  $St \leq 0.60$  mais sont discutables à plus haute fréquence.

Suite à l'extraction des amplitudes initiales de chacun des modes à partir des données LES, une analyse PSE non linéaire est mise en place. Une première application consiste à étudier l'effet de l'amplitude initiale des modes. L'apparition d'effets non linéaires à partir d'une certaine amplitude initiale, ainsi que la validation du calcul des termes non linéaires sont ainsi présentées. Finalement, dans le cadre de la configuration étudiée, il a été montré que les non linéarités semblent avoir un impact mineur sur la dynamique des ondes d'instabilité.

Malgré la mise en évidence d'une dynamique linéaire, la possibilité de manipuler les ondes d'instabilité par non linéarité reste envisageable en vue d'une réduction du rayonnement acoustique. Pour cela, une analyse PSE sera réalisée dans la suite avec pour objectif d'étudier l'effet sur le bruit de jet de l'excitation d'un ou plusieurs modes instables.

## Effet de l'excitation de modes instables avec les PSE non linéaires

**S**UR une configuration réaliste de jet non excité, les interactions non linéaires entre les ondes d'instabilité semblent négligeables. Toutefois, des études expérimentales ont montré que l'excitation d'un ou plusieurs modes propres des jets pouvait altérer non seulement le champ hydrodynamique proche d'un jet mais également son rayonnement acoustique. Dans ce chapitre, une analyse par PSE non linéaires est menée avec pour objectif d'étudier l'effet de l'excitation des modes instables sur le développement des ondes d'instabilité et le bruit qui leur est associé. L'étude se restreint dans un premier temps à l'excitation d'un seul mode où une attention particulière est portée sur l'impact de son amplitude et de sa phase initiale sur les autres modes propres du jet. Un complément d'analyse est également réalisé sur l'excitation d'un mode sous-harmonique. Enfin, la démarche est étendue à l'excitation de deux harmoniques fréquentielles et azimutales. Ces travaux ont fait l'objet d'un article publié dans *Physics of Fluids* et reproduit ci-après.

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>PSE analysis of nonlinear interactions with forced eigenmodes to control subsonic jet instabilities . . . . .</b>	<b>103</b>
<b>4.2</b>	<b>Complément à l'article : Excitation d'un mode sous-harmonique</b>	<b>127</b>

---

### 4.1 PSE analysis of nonlinear interactions with forced eigenmodes to control subsonic jet instabilities

Cette section est la retranscription d'un article publié au cours de ces travaux de thèse, [Itasse \*et al.\* \(2015\)](#), portant sur l'analyse par une approche PSE des interactions non linéaires dans un jet soumis à une excitation d'un ou plusieurs modes instables. Expérimentalement, [Kopiev \*et al.\* \(2013\)](#) ont examiné la possibilité de contrôler une onde d'instabilité générée artificiellement dans la couche de mélange d'un jet. En revanche, une réduction du bruit de jet par une excitation des ondes d'instabilité naturelles d'un jet n'a jamais été démontrée. Pour cela, il est essentiel de déterminer comment exciter proprement le jet pour en réduire le bruit, et non l'augmenter. L'approche PSE

non linéaires est parfaitement adaptée à cette étude car elle permet de considérer les mécanismes de résonance modale en azimut et en temps. Ainsi, l'objectif de cet article est de réaliser une étude paramétrique avec les PSE dans le but de modifier l'évolution d'un des modes dominants et donc d'influer sur le rayonnement acoustique.

Pour clarifier la démarche adoptée dans cette étude, les étapes clés sont d'abord décrites. Le jet sur lequel repose cette analyse correspond à la configuration du chapitre 3 où cette fois le champ de base utilisé est le champ moyen issu d'une LES réalisée par Huet (2013). Sur cette configuration, l'instabilité la plus amplifiée est axisymétrique sur une bande fréquentielle située autour de  $St = 0.4$ . De même, le rayonnement acoustique est large bande et domine majoritairement en aval du jet sur la même gamme fréquentielle. Le but de l'étude est d'altérer le comportement d'un mode spécifique, désigné comme le mode « cible ». On choisit ici le mode axisymétrique ( $m = 0$ ) à la fréquence  $St = 0.4$ .

Dans un premier temps, l'analyse est restreinte aux interactions d'harmoniques fréquentielles pour  $m = 0$ . Une amplitude initiale identique est assignée à tous les modes, excepté un ou deux, les modes « tueurs », auxquels on attribue une amplitude initiale supérieure. L'excitation d'un seul mode induit une croissance des harmoniques du mode excité et une amplification du bruit de jet, ce qui n'est pas en accord avec l'objectif recherché. En revanche, l'excitation de deux modes permet d'influencer principalement le mode correspondant à la différence fréquentielle des modes « tueurs ». Ainsi, l'altération du mode « cible » est possible. Son champ de pression proche est notamment minimisé par une analyse attentive des amplitudes et des phases initiales des modes « tueurs ». De même, le champ acoustique du mode initialement dominant est significativement réduit, en contrepartie d'une augmentation des hautes fréquences et du niveau global de bruit. Un décalage des modes « tueurs » à de plus hautes fréquences conclut l'analyse des interactions fréquentielles.

Ensuite, le même processus est appliqué aux interactions azimutales en excitant deux modes « tueurs »  $(m_1, n_1)$  et  $(m_2, n_2)$ . Comme précédemment, l'excitation de ces deux modes permet de modifier le développement et le rayonnement acoustique du mode « cible », dévoilant par la même occasion le phénomène de différence azimutale.

# Parabolized Stability Equations analysis of nonlinear interactions with forced eigenmodes to control subsonic jet instabilities

Maxime Itasse,<sup>a)</sup> Jean-Philippe Brazier,<sup>b)</sup> Olivier Léon,<sup>c)</sup>

and Grégoire Casalis<sup>d)</sup>

*Onera - The French Aerospace Lab, F-31055 Toulouse, France*

(Received 12 February 2015; accepted 31 July 2015; published online 17 August 2015)

Nonlinear evolution of disturbances in an axisymmetric, high subsonic, high Reynolds number hot jet with forced eigenmodes is studied using the Parabolized Stability Equations (PSE) approach to understand how modes interact with one another. Both frequency and azimuthal harmonic interactions are analyzed by setting up one or two modes at higher initial amplitudes and various phases. While single mode excitation leads to harmonic growth and jet noise amplification, controlling the evolution of a specific mode has been made possible by forcing two modes  $(m_1, n_1)$ ,  $(m_2, n_2)$ , such that the difference in azimuth and in frequency matches the desired “target” mode  $(m_1 - m_2, n_1 - n_2)$ . A careful setup of the initial amplitudes and phases of the forced modes, defined as the “killer” modes, has allowed the minimizing of the initially dominant instability in the near pressure field, as well as its estimated radiated noise with a 15 dB loss. Although an increase of the overall sound pressure has been found in the range of azimuth and frequency analyzed, the present paper reveals the possibility to make the initially dominant instability ineffective acoustically using nonlinear interactions with forced eigenmodes. © 2015 AIP Publishing LLC. [<http://dx.doi.org/10.1063/1.4928472>]

## I. INTRODUCTION

If 30 yr of research and technological progress carried on engines have led to a jet noise decrease of more than 20 dB, the road to silence remains challenging for the aeronautical community. In Europe, the *Advisory Council for Aeronautics Research* (ACARE) has set an ambitious target to reduce the effective perceived noise by 50% from 2000 to 2020. To best meet those even more severe restrictions, the aerospace industry has performed some investigations in order to identify the noise sources leading to the intense acoustic radiation of the aircraft. Contrary to the interactions between the turbulence and the walls or the fan which are the dominant noise sources at landing, the high speed hot jet from the nozzle contributes for the largest part to the sound radiation during takeoff. A fine study of the underlying mechanisms is essential in the goal of developing sound-control strategies.

In this context, Lighthill<sup>1</sup> is considered as a pioneer of aeroacoustics. He was the first one who proposed an aerodynamically generated sound model by recasting the exact equations of fluid motion in the form of an inhomogeneous wave equation. Lighthill's eighth power law states that the acoustic power radiated by a jet is proportional to the eighth power of the jet speed and the square of its diameter. The law potential has been largely exploited by manufacturers with lower exit velocities and larger jet engines within the weight and size limits. New solutions have been sought and jet flow control has seemed promising over the past decades. Prediction of jet noise and

---

<sup>a)</sup>Electronic mail: [Maxime.Itasse@onera.fr](mailto:Maxime.Itasse@onera.fr)

<sup>b)</sup>Electronic mail: [Jean-Philippe.Brazier@onera.fr](mailto:Jean-Philippe.Brazier@onera.fr)

<sup>c)</sup>Electronic mail: [Olivier.Leon@onera.fr](mailto:Olivier.Leon@onera.fr)

<sup>d)</sup>Electronic mail: [Gregoire.Casalis@onera.fr](mailto:Gregoire.Casalis@onera.fr)



understanding of noise generation mechanisms have made significant progress but the exact role of turbulence is not yet completely understood.

In the late 1950s, where turbulence was considered purely chaotic, the experiment of Franklin and Foxwell<sup>2</sup> showed the existence of space-correlation in the random pressure field of a laminar jet, calling into question the non-deterministic behavior of the turbulence. Bradshaw *et al.*<sup>3</sup> confirmed these results for an initially laminar jet, highlighting large-scale coherent structures. In the case of turbulent mixing layers and jets, Mollo-Christensen *et al.*<sup>4</sup> and Crow and Champagne<sup>5</sup> also underlined the particular organization of the pressure disturbances in the form of spatially correlated wave-packets. Already, the possible significant role of these structures in bulk mixing and sound production was mentioned. Henceforth, the large-scale structures are recognized as a major component of the radiated far-field noise in the aft direction of high subsonic and supersonic jets.

By studying subsonic wave-packets, Crighton and Huerre<sup>6</sup> found that perturbation growth and decay generate supersonic components in the wavenumber spectra which radiate sound with superdirectivity in the aft of the jet. Recently, Cavalieri *et al.*<sup>7</sup> and Cavalieri and Agarwal<sup>8</sup> showed that temporal modulation and intermittency are also significant parameters in the generation of noise. On the whole, an increasing number of clues contributes to put emphasis on the role of large-scale structures in the radiated sound of jets. Excellent review papers are available in the scientific literature such as Tam<sup>9</sup> on jet noise research, Colonius and Lele<sup>10</sup> on computational aeroacoustics, and Jordan and Gervais<sup>11</sup> on experimental methods.

From an experimental point of view, as in the work of Suzuki and Colonius,<sup>12</sup> or through computational aeroacoustics, with Cavalieri *et al.*,<sup>13</sup> the study of these orderly structures may be carried out through different approaches. Despite significant progress on high-fidelity numerical simulations, Direct Numerical Simulation (DNS) and Large-Eddy Simulations (LESs) are still expensive. Stability theory offers a theoretical framework to study large-scale structures which have been identified as Kelvin-Helmholtz convective instabilities. A promising, but costly, method is the global stability analysis which provides access to the entire modes of a jet as realized by Nichols *et al.*<sup>14</sup> For accurately assessing the unstable modes describing the large-scale structures, more cost-effective methods are the local stability approaches.

The Parabolized Stability Equations (PSEs) are a generalization of the local Linear Stability Theory (LST). Originally conceived by Bertolotti and Herbert,<sup>15</sup> this method is able to capture non-parallel and nonlinear effects of slowly varying shear flows. First, Balakumar<sup>16</sup> and Yen and Messersmith<sup>17</sup> applied the linear PSE approach to cases of supersonic jets while high subsonic hot jets have been considered later by Bertolotti and Colonius.<sup>18</sup> If in supersonic case flow disturbances and the associated far-field acoustic radiation have been successfully captured, coupling with a propagation method is necessary in subsonic cases as highlighted by Piot *et al.*<sup>19</sup> Nonetheless, near-field comparisons with experiment are remarkable over a broad range of jet flows as in the works of Gudmundsson<sup>20</sup> and Gudmundsson and Colonius.<sup>21</sup> Recently, the linear PSE model has been applied to complex configurations. For example, Léon<sup>22</sup> and Léon and Brazier<sup>23</sup> have focused their work on dual-stream jets.

In order to control the jet noise, the main approach is to enhance the mixing mechanism. Chevrons, serrated or lobbed nozzles, continuous and pulsed micro-jets make it possible. It is now well established that high-amplitude impulsive or single-frequency excitation near the preferred mode of the jet can, to a certain extent, control the behavior of an axisymmetric shear layer and its radiated noise as in the experiments of Samimy *et al.*<sup>24</sup> and Kearney-Fischer *et al.*<sup>25</sup> But, because the instability wave can enhance mixing only if it continues to grow, the degree of jet spreading offered by single-frequency excitation remains limited. Indeed, beyond a “saturation” amplitude, further increases have no effect on the spreading as reported by Raman *et al.*<sup>26</sup>

In 1979, Ronneberger and Ackermann<sup>27</sup> underlined the arising of the difference-frequency mode  $n_1 - n_2$  when forcing a fully turbulent jet simultaneously at two frequencies  $n_1, n_2$ . Then, interaction between the fundamental and subharmonic of the jet shear layer, referred as resonance or pairing, was largely investigated with simultaneous excitation of harmonically related acoustic tones. Arbey and Ffowcs Williams<sup>28</sup> exercised control on the process of harmonic generation by varying the phase between the two signals, sometimes virtually destroying the process. The effect of initial phase difference, Strouhal number pair, and amplitudes of the fundamental and subharmonics

tones was parametrically investigated by Raman and Rice.<sup>29</sup> Mankbadi<sup>30</sup> provided a theoretical analysis of the interaction between instability waves in a turbulent round jet while Suponitsky *et al.*<sup>31</sup> investigated linear and nonlinear mechanisms of sound generation in laminar subsonic jets by numerical resolution of the compressible Navier-Stokes equations. In particular, it was shown that low-frequency waves resulting from nonlinear interaction are more efficient in radiating sound when compared to linear instability waves radiating directly at the same frequencies. Experimentally, the possibility of controlling an artificially generated wave in the mixing layer of a jet has been investigated by Kopiev *et al.*,<sup>32</sup> where the theoretical conclusion that a time harmonic instability wave can be suppressed by an external acoustic wave with the properly chosen amplitude and phase has been verified. However, in the case of a natural turbulent jet, Rodriguez *et al.*<sup>33</sup> noticed that the richness of the modal spectrum reduced the efficiency of the difference-mode excitation.

As far as we know, jet noise reduction by mean of the control of naturally arising instability waves in a jet has never been demonstrated and learning how to properly force the jet in order to reduce, and not increase, the acoustic radiation is essential. Nonlinear PSE approach is perfectly suited to this issue because it allows to take into account modal resonances, in azimuth and in time. Malik and Chang<sup>34</sup> were the first to study helical-mode interaction,  $m = \pm 1$ , in a supersonic jet using nonlinear PSE. Disturbance saturation, spectrum filling, and large mean flow distortion downstream to the jet were the result of nonlinear interactions. The addition of an acoustic propagation model was undertaken by Cheung *et al.*<sup>35</sup> to investigate the influence of nonlinearity on the acoustic radiation of jets. Rolling-up vortices and coalescence were correctly reproduced in the near-field as well as the acoustic in the far-field.

Based on these works, the objective of the present paper is to rely on the proven ability of the hybrid PSE-acoustic propagation model to accurately capture the near and far-fields of jets to perform a parametric study for controlling the evolution of the dominating instability waves thereby influencing the radiated acoustic field. Although the intermittency of the wave-packets has a fundamental influence on sound emission, especially in a subsonic jet as mentioned by Cavalieri *et al.*,<sup>7</sup> the time-periodic forcing leads to phase-locked disturbances and thus the effect of jitter may not be a major issue here for the forced eigenmodes, following Cavalieri and Agarwal.<sup>8</sup> Despite this, nothing guarantees what the phase of the unforced modes will be. The extent of this analysis to natural broadband jets therefore suggests the need to control the initial phase of each mode altered by nonlinearity.

Such a study is carried out for two reasons. First, despite the fact that the large-scale structures are now recognized to play a significant role in the noise generation, the exact underlying mechanism is still not completely understood. Because the PSE approach allows to choose the retained azimuthal and frequency modes, as well as their relative initial amplitude and phase, isolating specific modes and evaluating their nonlinear contributions are made easier. With proper initial conditions, it is then possible to quantify how modes interact with one another. Second, with the recent development of active control techniques, such as plasma actuators, it is now possible to provide excitation signals at high amplitude and high frequency for flow control and noise reduction. However, an experimental parametric study over a broad range of forcing to reduce jet noise is time-consuming and costly. An efficient way to find relevant initial conditions is made possible through the use of nonlinear PSE. Indeed, as we know how nonlinear interactions occur, finding which modes to force at which amplitude and phase in order to minimize the near pressure field or the noise radiation is now feasible.

In the present paper, the nonlinear PSE approach is applied to a high subsonic hot jet with a Mach number  $M_j = 0.7$  and a Reynolds number  $Re_d = 4 \times 10^5$ , corresponding to a previous LES computed by Huet.<sup>36</sup> For heated jets, as mentioned by Monkewitz and Sohn,<sup>37</sup> an absolute instability may be present. However, similarly to Gudmundsson,<sup>20</sup> due to the relatively low temperature ratio and the exhaust velocity, absolute instability is excluded in this work. Frequency and azimuthal modes interactions will be studied separately over a broad range of initial amplitudes and phases. The control of the dominant “target” mode will be made possible by increasing the amplitudes of “killer” modes. The optimization of the “killer” mode amplitudes and phases will lead to a decrease of the dominant unstable mode in the near-field as well as in the far-field.

The paper is organized as follows. Section II presents the nonlinear PSE and the Kirchhoff surface formulation. The mean flow, on which the PSE analysis will be conducted, is presented in Section III. Section IV explores first nonlinear interactions of axisymmetric modes at various frequencies while nonlinear contributions of azimuthal modes are analyzed and interpreted later.

## II. INSTABILITY WAVE MODEL AND ACOUSTIC PROPAGATION

### A. Parabolized stability equations

Nonlinear PSEs are used to evaluate the near-field flow disturbances generated by unstable waves in the jet shear layer. Literally, the vector of flow variables  $\underline{q} = [u_x, u_r, u_\theta, \rho, p]^T$  is split into the sum of time-averaged  $\underline{\bar{q}}$  and fluctuating  $\underline{q}'$  components,

$$\underline{q}(x, r, \theta, t) = \underline{\bar{q}}(x, r) + \underline{q}'(x, r, \theta, t), \quad (1)$$

with  $x, r, \theta$  the axial, radial, and azimuthal coordinates in the cylindrical reference frame and  $t$  the time variable. The usual perfect gas assumption is done so that the three velocity components, the density, and the pressure, as given in  $\underline{q}$ , are sufficient to characterize the flow. In the present paper, only round nozzles are considered, which makes possible the previous axisymmetric stationary form of the mean flow. A sum of Fourier modes is used to model the fluctuations, taking into account the symmetry in the azimuthal direction and assuming periodicity in time. If such an approach allows mode-to-mode interactions, a limitation to a finite number ( $m_{max}, n_{max}$ ) of modes is necessary, which leads to series truncation,

$$\underline{q}'(x, r, \theta, t) = \sum_{n=-n_{max}}^{n_{max}} \sum_{m=-m_{max}}^{m_{max}} \underline{\tilde{q}}_{m,n}(x, r) \exp [i(m\theta - n\omega t)] + \underline{q}'', \quad (2)$$

with  $m$  the azimuthal wavenumber,  $\omega$  the angular frequency, and  $n$  the harmonic frequency number. All the remaining unresolved modes are formally pulled together in  $\underline{q}''$ . It should be noted that even though negative frequencies ( $n < 0$ ) are considered in Eq. (2), the disturbances are real-valued. Therefore, the computational effort can be reduced since only the modes with  $n \geq 0$  need to be solved by imposing the following condition:

$$\underline{\tilde{q}}_{-m,-n} = \underline{\tilde{q}}_{m,n}^\dagger, \quad (3)$$

where  $^\dagger$  refers to the complex conjugate.

Assuming the mean flow  $\underline{\bar{q}}$  to be weakly non-parallel in the streamwise direction  $x$ , the modal function  $\underline{\tilde{q}}_{m,n}$  is decomposed into a slowly varying shape function in the axial  $x$ -direction  $\underline{\hat{q}}_{m,n}$  and a rapidly varying wave-like part  $\mathcal{A}_{m,n}$  as developed by Bertolotti and Herbert,<sup>15</sup>

$$\underline{\tilde{q}}_{m,n}(x, r) = \underline{\hat{q}}_{m,n}(x, r) \mathcal{A}_{m,n}(x) = \underline{\hat{q}}_{m,n} \gamma_{m,n} \exp \left( i \int_{x_0}^x \alpha_{m,n}(\xi) d\xi \right), \quad (4)$$

$$\text{with } \gamma_{m,n} = \varepsilon_{m,n} \exp (i \phi_{m,n}), \quad (5)$$

where  $\alpha_{m,n}$  is the complex axial wavenumber and  $x_0$  the initial axial location.  $\varepsilon_{m,n}$  is the maximum amplitude of the streamwise disturbance velocity  $\hat{u}_{x,m,n}$  occurring at a radius where  $\phi_{m,n}$  is defined as the phase, both imposed at  $x_0$ .

Because the instability waves studied result from the inflectional mean profile of the jet shear layer, the viscous dissipation is assumed to have minor effects on their evolution for such flows at high Reynolds numbers and is neglected. Thus, the normal modes Eqs. (2) and (4) are introduced into the compressible inviscid continuity, momentum, and energy equations of a perturbed flow. Subtracting the terms corresponding to the mean flow yields the governing equations,

$$\mathcal{L}_{m,n}\{\underline{\hat{q}}_{m,n}\} = A_{m,n}\underline{\hat{q}}_{m,n} + B \frac{\partial \underline{\hat{q}}_{m,n}}{\partial x} + C \frac{\partial \underline{\hat{q}}_{m,n}}{\partial r} = -\frac{\mathcal{F}_{m,n}}{\mathcal{A}_{m,n}} - \frac{\mathcal{F}_{m,n}''}{\mathcal{A}_{m,n}}. \quad (6)$$

For the sake of clarity, the present system of equations is called the PSE, even though, unlike the original PSE, they are derived from the Euler equations, instead of the Navier-Stokes equations.

The operator  $\mathcal{L}_{m,n}$  is linear and depends only on the mean flow variables  $\bar{q}$ , the axial wavenumber  $\alpha_{m,n}$ , the angular frequency  $\omega$ , and the first-order derivatives. On the right-hand side, the nonlinear term  $\mathcal{F}_{m,n}$  involves products of the resolved azimuthal and frequency modes. They are evaluated in the time domain and transformed back into the frequency domain by means of FFT. The function  $\mathcal{F}_{m,n}''$  gathers the contributions resulting from nonlinear interactions involving unresolved modes. It will be neglected here, but it should be pointed out that due to the series truncation uncertainty,  $\mathcal{F}_{m,n}''$  is not necessarily negligible. Further insight on that issue can be found in Rodriguez *et al.*<sup>33</sup>

Similarly to the Parabolized Navier-Stokes (PNSs) equations, the system exhibits ellipticity due to  $\partial\hat{p}/\partial x$ , as mentioned by Haj-Hariri.<sup>38</sup> Following the approach developed by Vigneron *et al.*,<sup>39</sup> sufficient conditions to make the system parabolic were sought by splitting  $\partial\hat{p}/\partial x$  in two terms in the  $x$ -momentum equation,

$$\frac{\partial\hat{p}}{\partial x} = w \frac{\partial\hat{p}}{\partial x} + (1-w) \frac{\partial\hat{p}}{\partial x}. \quad (7)$$

If the first right-hand side term of Eq. (7) is kept while the second one is considered as a source term, the parabolicity condition provides a set of equations,

$$\begin{cases} \bar{\rho} M^2 \bar{u}_r^2 < 1 \\ w \leq \frac{\bar{\rho} M^2 \bar{u}_x^2}{1 - \bar{\rho} M^2 \bar{u}_r^2} \end{cases}. \quad (8)$$

with  $M$  the reference Mach number at the jet exit. The first condition requires the PSE approximation to be used only with slowly diverging jet, since  $\bar{u}_r$  needs to be small enough. The second one indicates the maximum fraction of  $\partial\hat{p}/\partial x$  that can be retained in the equations while maintaining them parabolic in the streamwise direction. One can notice that the effect of  $\partial\hat{p}/\partial x$  is completely neglected for incompressible jets, where  $w(M=0)=0$ , and is progressively included as the compressibility effects increase. Practically,  $w$  is evaluated as

$$w = \min \left[ 1, \frac{\rho M^2 \bar{u}_x^2}{1 - \rho M^2 \bar{u}_r^2} \right]. \quad (9)$$

The PSEs so obtained are now parabolic and can be solved by a computationally efficient streamwise marching technique. However, this parabolicity can be questioned for the normalization condition which is introduced in the following.

In Eq. (4), streamwise variations can be either absorbed in the axial wavenumber  $\alpha_{m,n}$  or in the eigenfunction  $\hat{q}_{m,n}$  component. A closure relationship on the kinetic energy is then employed individually for each mode to remove this ambiguity, as proposed by Bertolotti and Herbert,<sup>15</sup>

$$N_{m,n} = \int_0^\infty \hat{q}_{m,n}^\dagger \frac{\partial \hat{q}_{m,n}}{\partial x} dr = \int_0^\infty \left( \hat{u}_x^\dagger \frac{\partial \hat{u}_x}{\partial x} + \hat{u}_r^\dagger \frac{\partial \hat{u}_r}{\partial x} + \hat{u}_\theta^\dagger \frac{\partial \hat{u}_\theta}{\partial x} \right) dr = 0. \quad (10)$$

At  $r=0$ , many terms in the PSE are singular, especially in  $\mathcal{F}_{m,n}$ . Relying on the symmetry about the  $x$ -axis, the following boundary conditions are applied,

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{u}_x}{\partial r} = \hat{u}_r = \hat{u}_\theta = \frac{\partial \hat{p}}{\partial r} = \frac{\partial \hat{p}}{\partial x} = 0 & : \text{ for } m=0, \\ \hat{u}_x = \frac{\partial \hat{u}_r}{\partial r} = \frac{\partial \hat{u}_\theta}{\partial r} = \hat{p} = \hat{p} = 0 & : \text{ for } |m|=1, \\ \hat{u}_x = \hat{u}_r = \hat{u}_\theta = \hat{p} = \hat{p} = 0 & : \text{ for } |m| \geq 2. \end{cases} \quad (11)$$

In the far-field  $r \rightarrow +\infty$ , considering a medium at rest and neglecting the streamwise derivatives  $\partial \hat{u}_x / \partial x$  and  $\partial \hat{p} / \partial x$ , the PSE simplify to a second order homogeneous differential Bessel

equation for the pressure,

$$\frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{p}}{\partial r} + \left( \bar{\rho} n^2 \omega^2 M^2 - \frac{m^2}{r^2} - \alpha^2 \right) \hat{p} = 0. \quad (12)$$

The pressure shape function takes far away from the jet the form of a Hankel function of the first kind and order  $m$ ,

$$\hat{p}(x, r) = H_m^{(1)}(ir\lambda(x)), \quad (13)$$

with  $\lambda^2 = \alpha^2 - \bar{\rho} n^2 \omega^2 M^2$  such that  $\text{Re}(\lambda) > 0$ . Hankel-based boundary conditions are then applied at  $r = 15d$ , where  $d$  is the diameter of the nozzle, similarly to Piot *et al.*<sup>19</sup>

The discrete system of Eq. (6) is obtained by combining a fourth-order central compact finite difference scheme proposed by Gamet *et al.*<sup>40</sup> in the radial direction and an implicit first-order backward Euler scheme with a step size  $\Delta x = x_i - x_{i-1}$  in the streamwise direction,

$$\left( A_{m,n}^i + \frac{B^i}{\Delta x} + C^i \cdot D^i \right) \hat{q}_{m,n}^i = \frac{B^{i-1}}{\Delta x} \hat{q}_{m,n}^{i-1} - \frac{\mathcal{F}_{m,n}^i}{\mathcal{A}_{m,n}^i}, \quad (14)$$

with  $D^i$  the radial differentiation matrix such that  $\partial \hat{q}_{m,n}^i / \partial r = D^i \cdot \hat{q}_{m,n}^i$ .

Initial conditions for the PSE marching procedure are obtained through the local linear parallel stability theory. However, contrary to linear PSE, the initial amplitudes and phases of the modes, defined in Eq. (5), are key parameters here as discussed later on. The shape functions of all the  $\hat{q}_{m,n}$  modes are computed solving iteratively discrete system Eq. (14). The axial wavenumbers  $\alpha_{m,n}$  are updated at each iteration using a Newton-Raphson method based on the normalization condition Eq. (10) as in Léon and Brazier.<sup>41</sup>

## B. Cylindrical Kirchhoff surface formulation

As observed by Cheung *et al.*,<sup>35</sup> even though the PSE approach is able to accurately capture the perturbations inside the jet, it will fail in the appraisal of the acoustic radiation. However, as mentioned by Suzuki and Colonius,<sup>12</sup> the hydrodynamic PSE modes remain valid and dominant outside of the mixing layer on a limited radius range called the hydrodynamic area, where the mean flow is nearly irrotational and at rest. A cylindrical Kirchhoff surface positioned in that area will allow to reconstruct the far-field acoustic radiation associated with hydrodynamic fluctuations, similarly to Balakumar<sup>16</sup> and Gudmundsson and Colonius.<sup>42</sup>

Assuming a medium at rest outside of the jet, the pressure fluctuations satisfy the wave equation,

$$\frac{\partial^2 \tilde{p}_{m,n}}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \tilde{p}_{m,n}}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{p}_{m,n}}{\partial r} + \left( \bar{\rho} M^2 n^2 \omega^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) \tilde{p}_{m,n} = 0, \quad (15)$$

where the pressure disturbances calculated by the PSE are used as boundary conditions at the radial location  $r_K$  of the Kirchhoff surface. A Fourier transform in the axial direction leads to a Bessel differential equation whose solution can be expressed by means of first-kind Hankel functions,

$$\tilde{p}_{m,n}(x, r) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{p}_{m,n}^{(0)}(\eta) \frac{H_m^{(1)}(ir\lambda_K)}{H_m^{(1)}(ir_K\lambda_K)} e^{i\eta x} d\eta, \quad (16)$$

$$\text{where } \lambda_K^2 = \rho_{\infty} M^2 n^2 \omega^2 - \eta^2 \text{ with } \text{Re}(\lambda_K) > 0 \quad (17)$$

and with  $\tilde{p}_{m,n}^{(0)}$  the axial Fourier transform of the pressure fluctuation on the Kirchhoff surface. The total pressure fluctuation in the far-field is then rebuilt based on the previous modal decomposition,

$$p'(x, r, \theta, t) = \sum_{n=-n_{\max}}^{n_{\max}} \sum_{m=-m_{\max}}^{m_{\max}} \tilde{p}_{m,n}(x, r) \exp i(m\theta - n\omega t). \quad (18)$$



### C. Validation

A validation of the linear PSE code and of the Kirchhoff surface strategy has been previously realized by Léon<sup>23,41</sup> and Brazier *et al.*,<sup>43</sup> for various jet configurations ranging from the incompressible jet of Yen and Messersmith<sup>17</sup> to the supersonic jet experimentally studied by Troutt and McLaughlin.<sup>44</sup> Both near-field and far-field pressure distributions were correctly predicted for various frequencies and azimuthal wavenumbers. The results supported the validity of the linear PSE code and of the Kirchhoff surface formulation.

Since numerical simulations of turbulent jets with forced eigenmodes are uncommon, in order to validate the computation of the right-hand side term  $\mathcal{F}_{m,n}$  of Eq. (6), which contains the nonlinearities, two approaches have been used and compared.

The first previously mentioned approach consists in computing the nonlinear forcing terms in the time domain and transforming them back to the frequency domain by a Fourier transform. A second method allows to find an analytical solution of  $\mathcal{F}_{m,n}$  by identifying the product of series as a Cauchy product. The contributions of the second-order nonlinear terms on each mode are calculated analytically. The third-order nonlinear terms are not taken into account in this computation. For the optimized case mentioned later in Sec. IV E, a comparison of  $\mathcal{F}_{0,2}^{(i)}$  real and imaginary parts computed by Fourier transform ( $\circ$ ) and analytically ( $-$ ) at  $x/d = 3.0$  is reported in Fig. 1. The exponent ( $i$ ) refers, respectively, to continuity,  $x$ -momentum,  $r$ -momentum,  $\theta$ -momentum, and energy equations. Because only axisymmetric modes are considered in that specific example,  $\mathcal{F}_{0,2}^{(4)}$  equals zero. All results match perfectly for any  $x/d$ , then it is assumed that nonlinear terms are correctly estimated.

### III. MEAN FLOW COMPUTATION

Thereafter, a round nozzle with an exhaust diameter  $d$  of 80 mm previously studied by Muller *et al.*<sup>45</sup> and Huet<sup>36</sup> is considered. The jet characteristics are the Mach number  $M = U_j/c_j = 0.7$ , where  $c_j$  stands for the sound speed and  $U_j = 404 \text{ m s}^{-1}$  is the jet velocity, both at the centerline of the nozzle exit section. The temperature in the core region is  $T_j = 830 \text{ K}$  and the Reynolds number based on the exit conditions is  $Re_d = 4 \times 10^5$ . The ambient pressure and temperature are  $p_0 = 101\,325 \text{ Pa}$  and  $T_0 = 280 \text{ K}$ , respectively.

Unsteady flow field computation was performed by Huet<sup>36</sup> using LES with a Smagorinsky subgrid-scale model. An O-shaped conformal structured grid of  $30 \times 10^6$  cells has been used to model the nozzle and the jet. To provide accuracy close to the walls, the grid is densified near the walls to resolve thickened boundary layers. Of particular interest was the influence of boundary layer resolution to numerically reproduce initially turbulent jets. It was found necessary to seed turbulence inside the nozzle. Thus, uniform stagnation pressure and temperature values were

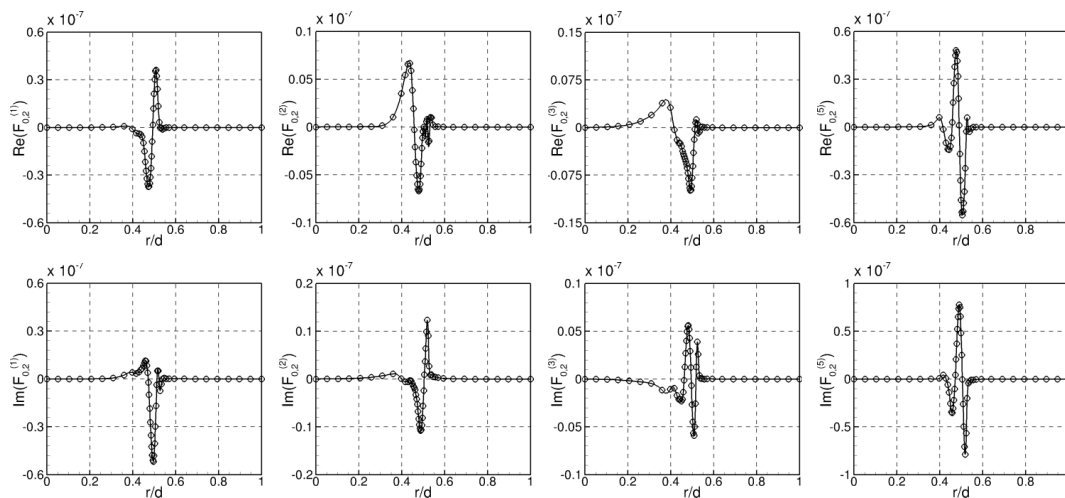


FIG. 1. Real and imaginary part of  $\mathcal{F}_{0,2}^{(i)}$  computed by Fourier transform ( $\circ$ ) and analytically ( $-$ ) at  $x/d = 3.0$ .

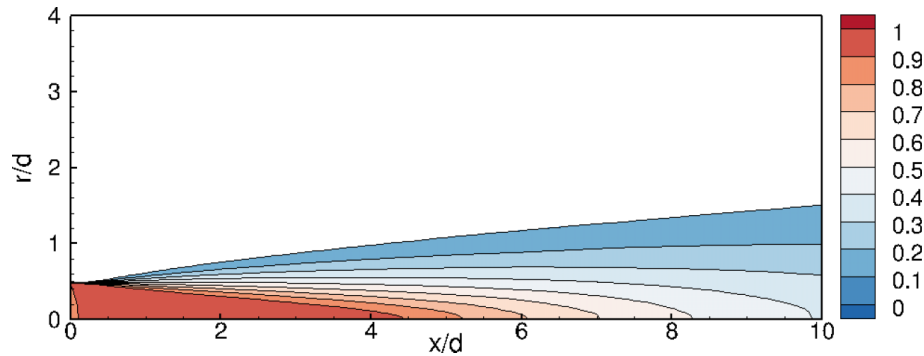


FIG. 2. Mean axial velocity contour from the LES.

exclusively imposed at the inlet and the boundary layers were let run their course. Time integration was made with a first-order implicit time scheme concurrently with a second-order upwind space discretization scheme to solve the Navier-Stokes equations. To perform mean flow averaging, the simulation was run with a time step of  $\Delta t = 2 \times 10^{-7}$  s up to a physical time of 60 ms or to a dimensionless time of 300 convective time units  $d/U_j$ , which was thought to be long enough to ensure a sufficient statistical convergence of the flow field.

In the case of turbulent flows, taking the mean flow as the base flow in stability analysis may be unsuitable, as mentioned by Bagheri *et al.*<sup>46</sup> However, as shown by Piot *et al.*,<sup>19</sup> Brazier *et al.*<sup>43</sup> and Gudmundsson and Colonius<sup>21</sup> with linear PSE and by Rodriguez *et al.*<sup>33</sup> with nonlinear PSE, applying stability theory on that “base flow” leads to good results in comparison with experiments, at least up to the end of the core region. In the present paper, failing any other alternative, the mean flow computed by the LES will also be used as a base flow. The mean axial velocity contour from the LES is presented in Fig. 2.

It is also worth emphasizing that nonlinear interactions of the instability waves may produce zero-frequency modes ( $n = 0$ ), representing a distortion of the mean flow. For laminar weakly forced jets, Salgado *et al.*<sup>47</sup> noted that mean flow correction did not induce much change in the behaviour of the modes, while it became a more important factor when a larger number of modes are affected by nonlinearity. Malik and Chang<sup>34</sup> also pointed out that this effect was mostly located downstream the potential core. In the case of a natural turbulent jet, the mean flow computed by the LES already includes the zero-frequency modes and computing them again with PSE would therefore be redundant, as mentioned in Rodriguez *et al.*<sup>33</sup> In the present analysis, where a specific forcing of modes is investigated, consideration of the mean flow distortion would perhaps be necessary but that would require to extract the base flow directly from the LES computation, which was not done here. However, this choice could be reconsidered in future work.

According to the above-mentioned remarks, we think that our results are valid before the end of the core region, but remain more questionable downstream.

#### IV. NONLINEAR INTERACTIONS ANALYSIS

The PSE model, presented in Sec. II A, is used here to understand how modes interact with one another on a realistic jet configuration. In order to clarify the following analysis, the main steps of the process are synthesized here.

For the natural unforced jet, the most amplified instabilities are axisymmetric ( $m = 0$ ) in a frequency band around  $St = 0.40$ . As well, the radiated sound is broadband and predominates mainly downstream of the jet over the same frequency range. The purpose of this study is to alter the behavior of a specific mode. Therefore, the mode on which control is needed, designated as the “target” mode, will be the axisymmetric mode ( $m = 0$ ) at  $St = 0.40$ .

As a first step, the analysis will be limited to frequency harmonic interactions. Identical initial amplitudes and phases will be set to all modes except one or two, the “killer” modes. Pure tone excitation will induce harmonic growth and jet noise amplification, which is not in agreement with

the current purpose. However, forcing two modes at higher initial amplitudes will only influence the difference-frequency mode. Alteration of the dominant mode development is then made possible. Near pressure field of the “target” mode will be minimized through a careful scan of initial amplitudes and phases of the “killer” modes. Far-field noise of the initially dominant mode will be reduced drastically whereas the high frequencies will be increased. Shifting “killer” modes to even higher frequencies will conclude the analysis of frequency nonlinear interactions.

Finally, the overall same process will be applied to azimuthal modes interactions at various frequencies, exciting two specific “killer” modes. As previously, bimodal excitation will be found relevant to alter “target” mode development, revealing at the same time not only the difference-frequency but also the difference-azimuth phenomenon.

### A. Effect of the initial modes amplitudes

Six axisymmetric modes are considered with frequencies ranging from  $St = 0.20$  to  $1.20$  by step of  $0.20$  ( $n_{max} = 6$ ). Even though accurate measurements at the nozzle were not performed on that configuration, relevant initial amplitudes are needed. As mentioned by Rodriguez *et al.*,<sup>33</sup> in the case of a turbulent jet where a broad spectrum of fluctuations exists, the order of magnitude of initial amplitudes must be the same for a large number of modes. Taking as a reference their measurements on a cold subsonic jet at  $M = 0.9$ , initial pressure amplitudes were found to be between  $0.01$  and  $0.1$  Pa corresponding to a dimensionless initial amplitude factor  $\varepsilon_{m,n} = 10^{-5}$  following Eq. (5).

Three different cases are considered next, looking at the effect of the initial modes amplitudes. The same initial amplitudes and phases are assigned to all the modes for various initial conditions ranging from  $1 \times 10^{-5}$  to  $1 \times 10^{-3}$  as summarized in Table I. The results are presented in Fig. 3 where the N factor is used to compare the axial evolution of the modes,

$$N = \ln \left( \frac{A(x)}{A(x_0)} \right), \quad (19)$$

with  $A(x) = [\int_0^\infty (|\hat{u}_x|^2 + |\hat{u}_r|^2 + |\hat{u}_\phi|^2) dr]^{1/2}$  the root mean square velocity fluctuation. Nonlinear effects will be highlighted by the disparity between linear and nonlinear curves.

One can observe that for low initial amplitudes, the linear and nonlinear computations match perfectly. The nonlinear interactions have no effect on the modes evolution. On the other hand, discrepancies appear at higher amplitudes. Thus, for  $\varepsilon_{m,n} = 10^{-3}$ , slight modifications in the evolution of the modes  $n = 2, 4, 5$ , and  $6$  are noticeable while the mode  $n = 1$  is significantly changed. The mode  $n = 3$  seems to be unaltered under that specific initial conditions. Weak nonlinear effects are also mentioned by Salgado *et al.*<sup>47</sup> at similar initial amplitudes.

The main difficulty is to understand why one mode is changed by nonlinearity and another one is not. In the following discussion, a step-by-step analysis is proposed to clarify the underlying mechanism of frequency harmonic interactions with the aim to control the dominant mode (0,2) corresponding to  $St = 0.4$ .

### B. Single frequency excitation

In this section, single frequency excitation effect is analyzed. The present purpose is not to provide an exact representation of the jet but rather to investigate nonlinear interaction of subsonic jet instabilities with forced eigenmodes. In order to isolate phenomena, all the modes are then

TABLE I. Initial amplitudes of modes referring to Fig. 3.

Case	$\varepsilon_{0,1} (St=0.2)$	$\varepsilon_{0,2} (St=0.4)$	$\varepsilon_{0,3} (St=0.6)$	$\varepsilon_{0,4} (St=0.8)$	$\varepsilon_{0,5} (St=1.0)$	$\varepsilon_{0,6} (St=1.2)$
A1 (○)	$1 \times 10^{-5}$	$1 \times 10^{-5}$	$1 \times 10^{-5}$	$1 \times 10^{-5}$	$1 \times 10^{-5}$	$1 \times 10^{-5}$
A2 (●)	$1 \times 10^{-4}$	$1 \times 10^{-4}$	$1 \times 10^{-4}$	$1 \times 10^{-4}$	$1 \times 10^{-4}$	$1 \times 10^{-4}$
A3 (△)	$1 \times 10^{-3}$	$1 \times 10^{-3}$	$1 \times 10^{-3}$	$1 \times 10^{-3}$	$1 \times 10^{-3}$	$1 \times 10^{-3}$



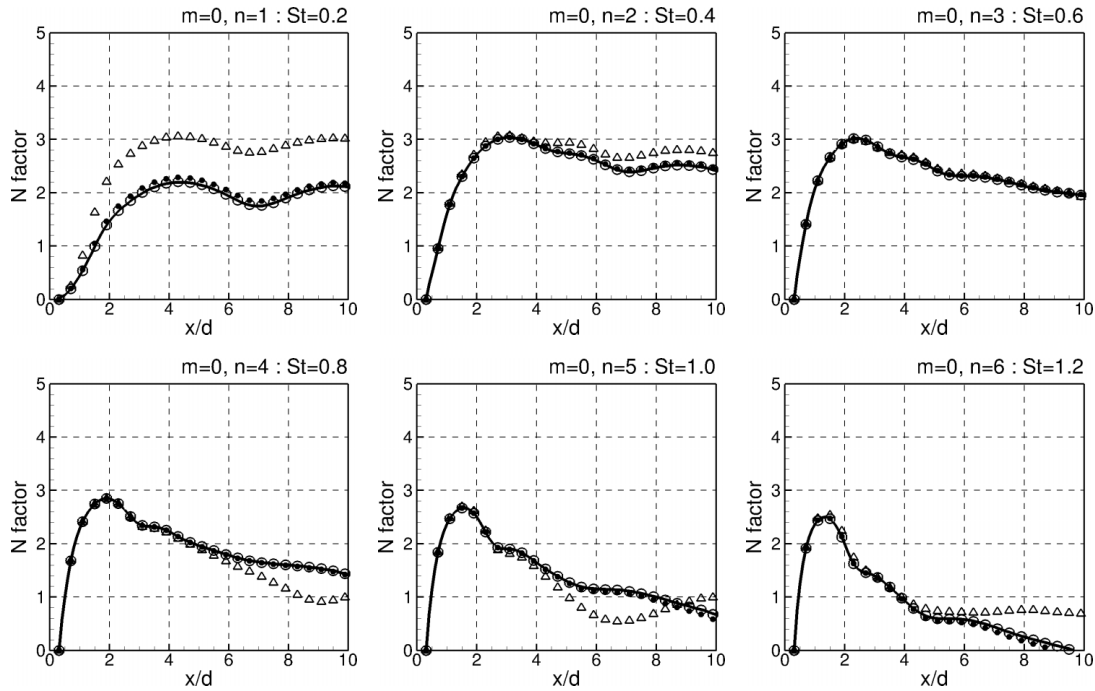


FIG. 3. N factor comparison for all modes between nonlinear computations at various initial amplitudes  $\varepsilon_{m,n} = 10^{-5}$  ( $\circ$ );  $10^{-4}$  ( $\bullet$ );  $10^{-3}$  ( $\triangle$ ); and linear PSE (—).

initialized at the same deliberately low initial amplitude of  $\varepsilon_{m,n} = 1 \times 10^{-7}$ , similarly to Salgado *et al.*<sup>47</sup> The  $St = 0.4$  is an exception with an initial amplitude increased to  $\varepsilon_{0,2} = 1 \times 10^{-5}$  and  $\varepsilon_{0,2} = 1 \times 10^{-4}$  to simulate the effect of forcing the dominant mode, as mentioned in Table II. Results are reported in Fig. 4 where the N factor is used to illustrate the nonlinear effects.

On the one hand, with  $\varepsilon_{0,2} = 1 \times 10^{-5}$ , only slight changes appear on the  $St = 0.8$  mode, which corresponds to the first harmonic of the forced mode. All the remaining modes are kept unaltered by the nonlinear interactions. On the other hand, as the initial amplitude of the forced mode is increased, the discrepancies previously revealed on the  $St = 0.8$  become clearly significant with a sharp increase of the N factor. As the first harmonic becomes large enough, the second one  $St = 1.2$  starts to be also affected. The leftover modes are still insensitive to the forced mode.

As reported by Bechert and Pfizenmaier,<sup>48</sup> above a certain excitation level, due to harmonics growth, the broadband jet noise can then be amplified considerably by a pure tone excitation. However, with a view to controlling dominant mode, forcing low frequency modes at high amplitudes is not conceivable. A more efficient mechanism is needed.

### C. Difference-frequency mode

In 1979, Ronneberger and Ackermann<sup>27</sup> ran experiments on a turbulent jet to quantify the effect of nonlinear interactions of instability waves on the radiated sound. By exciting a jet at two frequencies  $n_1, n_2$ , they found that the combination frequencies  $n_1 - n_2$ ,  $n_1 + n_2$ ,  $2n_1 - n_2$ , and  $2n_2 - n_1$  exhibit wave-like character in the near-field. In addition, the difference-frequency  $n_1 - n_2$  predominates over other combination frequencies in the far-field, with a distinct directivity.

TABLE II. Initial amplitudes of modes referring to Fig. 4. Boldface values refer to the forced mode initial conditions.

Case	$\varepsilon_{0,1} (St = 0.2)$	$\varepsilon_{0,2} (St = 0.4)$	$\varepsilon_{0,3} (St = 0.6)$	$\varepsilon_{0,4} (St = 0.8)$	$\varepsilon_{0,5} (St = 1.0)$	$\varepsilon_{0,6} (St = 1.2)$
B1 ( $\circ$ )	$1 \times 10^{-7}$	<b><math>1 \times 10^{-5}</math></b>	$1 \times 10^{-7}$	$1 \times 10^{-7}$	$1 \times 10^{-7}$	$1 \times 10^{-7}$
B2 ( $\bullet$ )	$1 \times 10^{-7}$	<b><math>1 \times 10^{-4}</math></b>	$1 \times 10^{-7}$	$1 \times 10^{-7}$	$1 \times 10^{-7}$	$1 \times 10^{-7}$

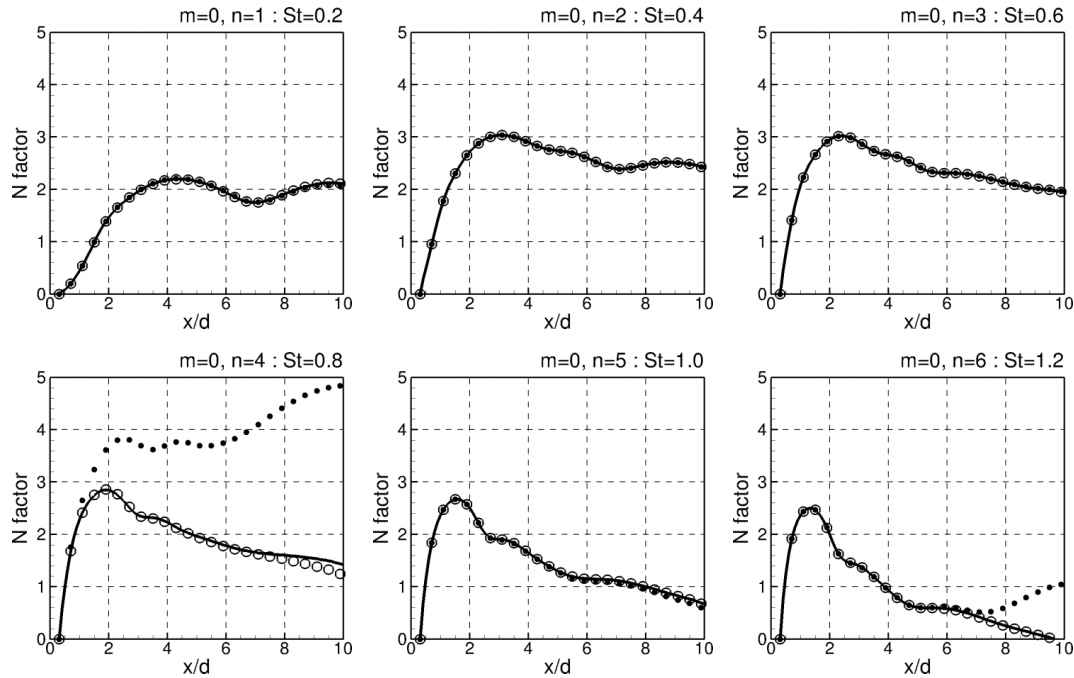


FIG. 4. Effect of forcing one frequency, mode (0,2), at a higher amplitude;  $\varepsilon_{0,2} = 10^{-5}$  ( $\circ$ );  $10^{-4}$  ( $\bullet$ ); linear PSE (—).

This process is here investigated numerically. The initial amplitude of  $\varepsilon_{m,n} = 1 \times 10^{-7}$  remains assigned to all modes while the two frequencies  $St = 0.8$  and  $St = 1.2$  are forced at higher initial amplitudes. Three different initial amplitudes are analyzed  $\varepsilon_{0,4} = \varepsilon_{0,6} = 1 \times 10^{-5}$  ( $\circ$ ),  $2 \times 10^{-5}$  ( $\bullet$ ), and  $4 \times 10^{-5}$  ( $\Delta$ ) as referred in Table III. The N factor of all the modes under these configurations is reported in Fig. 5.

As expected, by forcing two specific frequencies, only the difference-frequency mode  $St = 0.4$  is affected. If the maximum of the amplification factor is increased by 30%, its location, around  $x/d = 3.0$ , is not altered.

The use of difference-mode interaction may then be promising in order to control jet instabilities and possibly reduce noise radiation if the pressure field is altered favorably. The two forced frequencies, where energy is injected in to alter the behavior of a specific “target” mode, are qualified as “killer” modes. However, as shown above, the N factor of the difference-frequency mode is very sensitive to the initial amplitudes of the forced modes.

In the next paragraph, attention will be paid to the effect of the initial amplitudes and phases of the “killer” modes on the near pressure field.

#### D. Initial phase effects in the near-field

If the N factor is an effective parameter to quantify the influence of nonlinear interactions on modes, the pressure field remains the starting point of any acoustic analysis. As an extension of the previous case C2 ( $\bullet$ ), the pressure amplitude  $|p'_{0,2}|$  of the mode (0,2) along the line  $r/d = 0.5$  is reported on the top left side of Fig. 6. It should be noted that the two “killer” frequencies  $St = 0.8$  and

TABLE III. Initial amplitudes of modes referring to Fig. 5. Boldface values refer to the forced modes initial conditions.

Case	$\varepsilon_{0,1} (St=0.2)$	$\varepsilon_{0,2} (St=0.4)$	$\varepsilon_{0,3} (St=0.6)$	$\varepsilon_{0,4} (St=0.8)$	$\varepsilon_{0,5} (St=1.0)$	$\varepsilon_{0,6} (St=1.2)$
C1 ( $\circ$ )	$1 \times 10^{-7}$	$1 \times 10^{-7}$	$1 \times 10^{-7}$	<b><math>1 \times 10^{-5}</math></b>	$1 \times 10^{-7}$	<b><math>1 \times 10^{-5}</math></b>
C2 ( $\bullet$ )	$1 \times 10^{-7}$	$1 \times 10^{-7}$	$1 \times 10^{-7}$	<b><math>2 \times 10^{-5}</math></b>	$1 \times 10^{-7}$	<b><math>2 \times 10^{-5}</math></b>
C3 ( $\Delta$ )	$1 \times 10^{-7}$	$1 \times 10^{-7}$	$1 \times 10^{-7}$	<b><math>4 \times 10^{-5}</math></b>	$1 \times 10^{-7}$	<b><math>4 \times 10^{-5}</math></b>

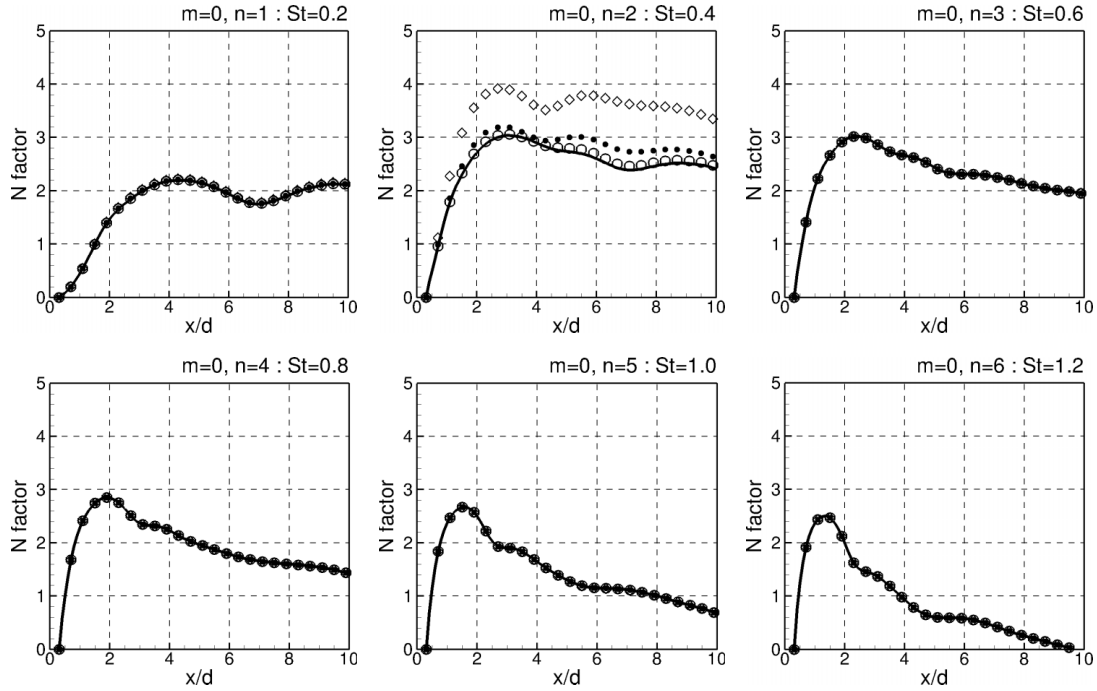


FIG. 5. Effect of forcing two high frequencies, modes (0,4) and (0,6), at higher initial amplitudes;  $\varepsilon_{0,4} = \varepsilon_{0,6} = 1 \times 10^{-5}$  ( $\circ$ );  $2 \times 10^{-5}$  ( $\bullet$ );  $4 \times 10^{-5}$  ( $\Delta$ ); linear PSE (—).

$St = 1.2$  influence exclusively the “target” mode  $St = 0.4$ ; consequently, only the pressure amplitude of the latter will be represented in the following figures. With  $\varepsilon_{0,4} = \varepsilon_{0,6} = 2 \times 10^{-5}$  ( $\circ$ ), even though the peak location remains the same, its value is increased by more than 20%. The acoustic radiation generated by the mode  $St = 0.4$  may intensify as well which would defeat the purpose.

Until now, a missing parameter was the initial phase of the modes which has been found relevant in the process of resonance or pairing by Arbey and Ffowcs Williams.<sup>28</sup> By varying the phase between two signals at harmonically related frequencies, control was exercised on both harmonic

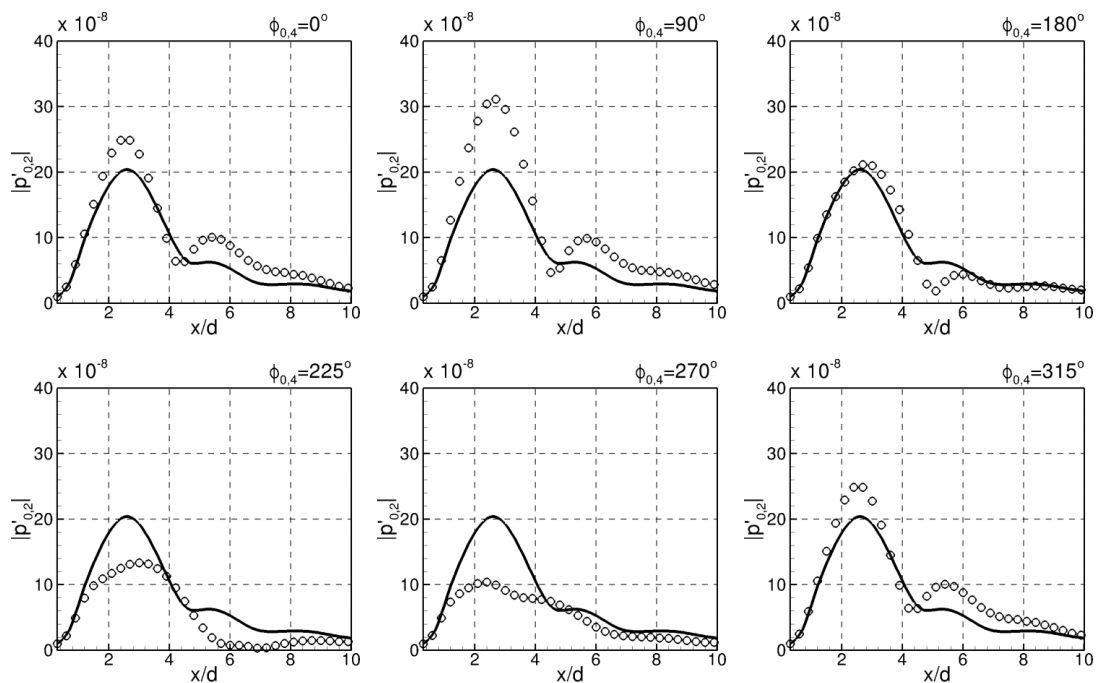


FIG. 6. Pressure amplitude of the “target” mode (0,2) along the line  $r/d = 0.5$  when forcing the modes (0,4) and (0,6) at  $\varepsilon_{0,4} = \varepsilon_{0,6} = 2 \times 10^{-5}$  ( $\circ$ ) for various initial phases of the mode (0,4); (—) linear PSE.

TABLE IV. Various initial amplitudes of modes leading to the same results in the near-field. Boldface values refer to the forced modes initial conditions.

Case	$\varepsilon_{0,1} (St = 0.2)$	$\varepsilon_{0,2} (St = 0.4)$	$\varepsilon_{0,3} (St = 0.6)$	$\varepsilon_{0,4} (St = 0.8)$	$\varepsilon_{0,5} (St = 1.0)$	$\varepsilon_{0,6} (St = 1.2)$
E1	$1 \times 10^{-7}$	$1 \times 10^{-7}$	$1 \times 10^{-7}$	<b><math>2 \times 10^{-5}</math></b>	$1 \times 10^{-7}$	<b><math>4 \times 10^{-5}</math></b>
E2	$1 \times 10^{-7}$	$1 \times 10^{-7}$	$1 \times 10^{-7}$	<b><math>4 \times 10^{-5}</math></b>	$1 \times 10^{-7}$	<b><math>2 \times 10^{-5}</math></b>
E3	$1 \times 10^{-7}$	$1 \times 10^{-7}$	$1 \times 10^{-7}$	<b><math>1 \times 10^{-5}</math></b>	$1 \times 10^{-7}$	<b><math>8 \times 10^{-5}</math></b>

and subharmonic generation. Despite the fact that enhancing jet mixing by high-amplitude excitation has been well documented, the significance of the phase difference in the control of naturally arising instability waves in a jet and its part in the far-field noise is not known. It is therefore legitimate to ask whether any phase difference between the “killer” modes will change the pressure distribution of the “target” mode.

The phase influence of the forced mode (0,4) on the pressure amplitude of the target mode (0,2) is represented in Fig. 6. All the remaining modes are left with their previous initial conditions, such as the initial phase of the mode (0,6) which remains at zero. The phase impact on the pressure amplitude peak is obvious and promising. Indeed, if the peak value can be increased by 50% when forcing the initial phase of the mode (0,4) at  $\phi_{0,4} = 90^\circ$ , most importantly it can be reduced by 50% when  $\phi_{0,4} = 270^\circ$ . It also highlights the great significance of the relative initial phase of the modes when nonlinear interactions occur.

A way to reduce the efficiency of a dominant mode in the near-field should be to amplify two higher frequencies so that the difference-frequency mode corresponds to the “target” mode and sets their initial phases in order to reduce its pressure peak value.

### E. “Target” mode pressure peak minimization

An optimum in terms of initial amplitudes and phases of the “killer” modes is sought with the aim of reducing as much as possible the pressure peak value of the “target” frequency. After running multiple cases, it is not the initial amplitude of each mode set apart which was found relevant, but their product. As an example, Table IV summarizes three different cases where the initial amplitude product remains constant. The results, not presented here, superimposed perfectly between themselves in the near-field and thus, for a large number of configurations.

Leaving the initial phase of the mode (0,4) to  $\phi_{0,4} = 270^\circ$ , which is the most favorable configuration so far, the initial amplitude of the forced modes (0,4) and (0,6) is changed to minimize the pressure peak value of the “target” mode (0,2) in the near-field. Three cases are represented in Fig. 7 for  $\varepsilon_{0,4} \times \varepsilon_{0,6} = 5 \times 10^{-10}$ ,  $7 \times 10^{-10}$ , and  $9 \times 10^{-10}$ . An optimum is reached with  $\varepsilon_{0,4} \times \varepsilon_{0,6} = 7 \times 10^{-10}$  where the peak undergoes a decrease of more than 65%.

After paying attention to the initial amplitudes, the same study is conducted on the initial phases of the “killer” modes. As previously the independent initial phase of each mode is not

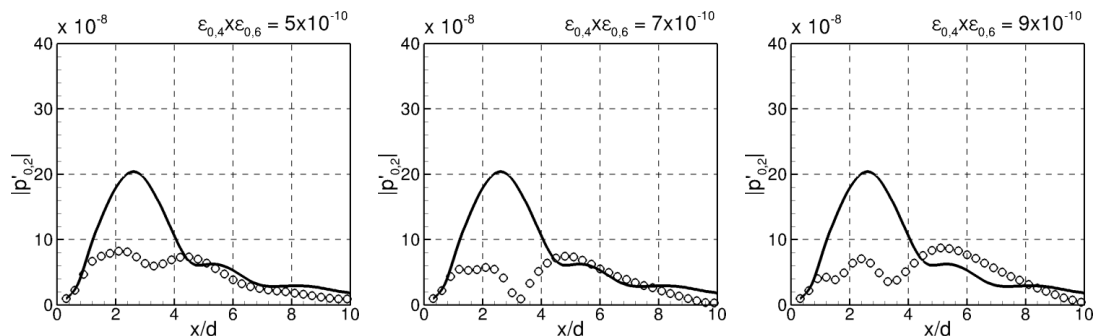


FIG. 7. Pressure amplitude of the “target” mode (0,2) along the line  $r/d = 0.5$  when forcing the modes (0,4) and (0,6) with  $\phi_{0,4} = 270^\circ$  for various initial amplitude products of the modes (0,4) and (0,6); ( $\circ$ ) nonlinear PSE; (—) linear PSE.

TABLE V. Various initial phases of modes leading to the same results in the near-field. Boldface values refer to the forced modes initial conditions.

Case	$\phi_{0,1} (St = 0.2)$	$\phi_{0,2} (St = 0.4)$	$\phi_{0,3} (St = 0.6)$	$\phi_{0,4} (St = 0.8)$	$\phi_{0,5} (St = 1.0)$	$\phi_{0,6} (St = 1.2)$
E4	0°	0°	0°	<b>270°</b>	0°	<b>0°</b>
E5	0°	0°	0°	<b>0°</b>	0°	<b>90°</b>
E6	0°	0°	0°	<b>225°</b>	0°	<b>315°</b>

essential, it is here the difference of the latter, modulo  $2\pi$ , which is primordial. Various cases are presented in Table V where the results were equal.

Taking as a starting point, the previous case with  $\varepsilon_{0,4} \times \varepsilon_{0,6} = 7 \times 10^{-10}$  where the impact of the nonlinear interactions was the most favorable value, three different phases configurations are reported in Fig. 8 with  $\phi_{0,6} - \phi_{0,4} = 85^\circ$ ,  $100^\circ$ , and  $115^\circ$ . If the discrepancies between the cases are not as large as before,  $\phi_{0,6} - \phi_{0,4} = 100^\circ$  leads to a further decrease of the pressure peak value.

## F. Effect of the series truncation

As mentioned by Rodriguez *et al.*,<sup>33</sup> nonlinearity couples the evolution of all the frequency and azimuthal wavenumbers. Thus, the arbitrary choice of the highest frequency mode,  $n_{max}$ , alters the evolution of any individual mode. For the unforced turbulent jet, these authors conclude that the evolution of higher frequencies is nearly linear. In the present case, where high initial amplitudes are applied to high frequencies, the effect of increasing the truncation frequency has to be investigated and evaluated.

Two cases are considered with different series truncation frequencies,  $St = 1.20$  ( $n_{max} = 6$ ) and  $St = 2.40$  ( $n_{max} = 12$ ), respectively. In both cases, the previous initial conditions are imposed, that is, to say  $\varepsilon_{0,4} \times \varepsilon_{0,6} = 7 \times 10^{-10}$  and  $\phi_{0,6} - \phi_{0,4} = 100^\circ$  while all the remaining modes are kept at  $\varepsilon_{m,n} = 1 \times 10^{-7}$  and  $\phi_{m,n} = 0^\circ$ .

The pressure amplitude along the line  $r/d = 0.5$  for the first six modes of the computations is reported in Fig. 9. Similarly to the above mentioned unforced turbulent jet, the impact of the truncation frequency on the evolution of lower frequency modes is negligible for the present forced case. In addition, when comparing the nonlinear results with the linear ones, the evolution of higher frequencies is also nearly linear and even for the forced modes. Therefore, the limitation to a finite number of modes will be assumed to have minor impact on the evolution of the modes, even if high initial amplitude is applied on the truncation frequency.

## G. Radiated noise

Since the radial extent of the linear-hydrodynamic region varies from one mode to another, a cylindrical Kirchhoff surface has to be determined for each of the modes to propagate the previous results to the far-field.

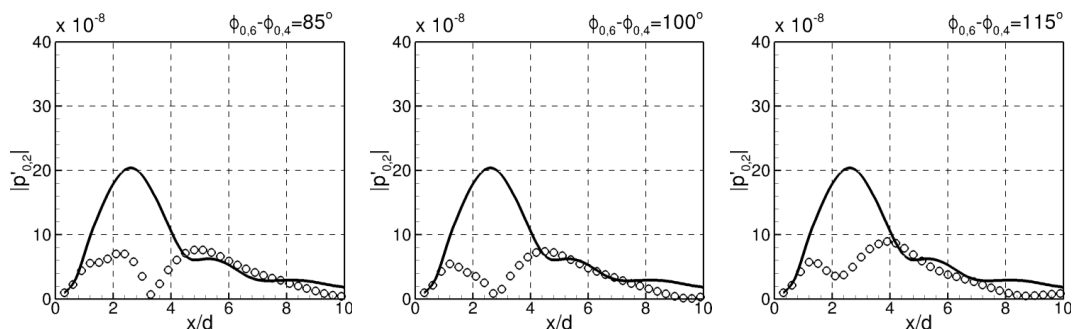


FIG. 8. Pressure amplitude of the “target” mode (0,2) along the line  $r/d = 0.5$  when exciting the modes (0,4) and (0,6) at the initial amplitude product  $\varepsilon_{0,4} \times \varepsilon_{0,6} = 7 \times 10^{-10}$  for various initial phase differences; (○) nonlinear PSE; (—) linear PSE.

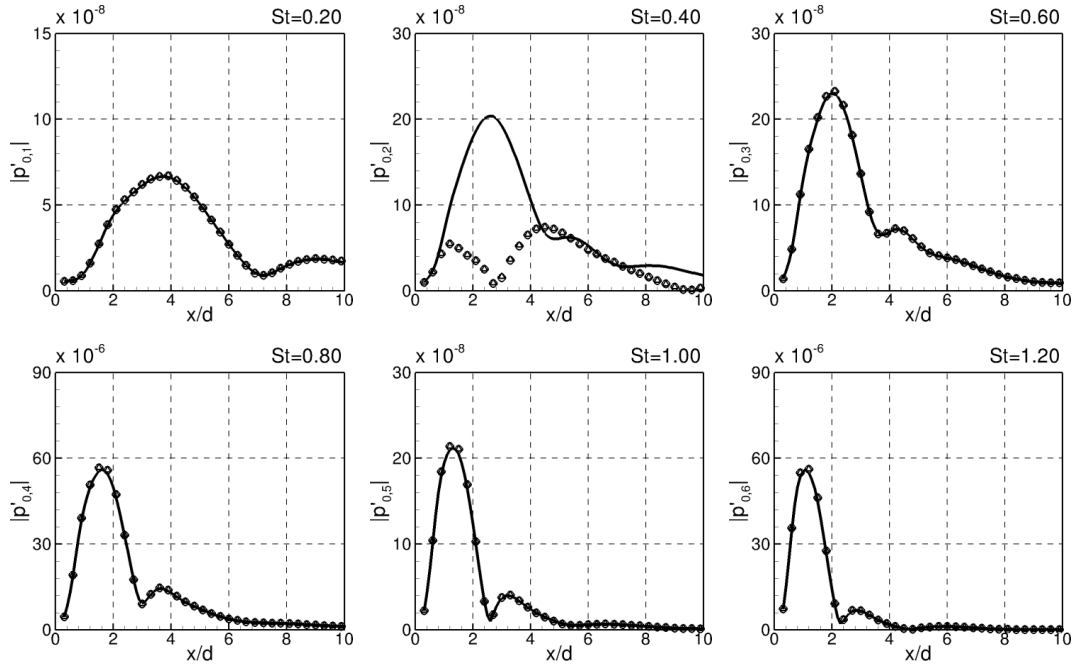


FIG. 9. Series truncation effect ( $n_{max}$ ) on modes pressure amplitude along the line  $r/d = 0.5$  when exciting the modes (0,4) and (0,6) at  $\varepsilon_{0,4} \times \varepsilon_{0,6} = 7 \times 10^{-10}$  and  $\phi_{0,6} - \phi_{0,4} = 100^\circ$ ; ( $\circ$ )  $n_{max} = 6$ ; ( $\triangle$ )  $n_{max} = 12$ ; (—) linear PSE.

A surface aligned with the  $x$ -axis may lead to discrepancies at certain axial locations due to the slow divergence of the jet. Thus, various radial locations of the Kirchhoff surface have been tried out, for each of the modes, on both the unforced and forced jet. Only the acoustic propagation solutions that best match the PSE results along the greater distance in the  $x$ -direction have been retained. As an example, both the PSE results (—) and the selected acoustic propagation solution of each mode (---) at  $x/d = 3.0$  are depicted in Figs. 10 and 11 for the unforced and excited jet, respectively.

With the frequency increase, perturbations are damped faster outside of the jet and the location of the Kirchhoff surface has to get closer to the jet. Nevertheless, a limitation to  $r_K/d \geq 1.1$  is

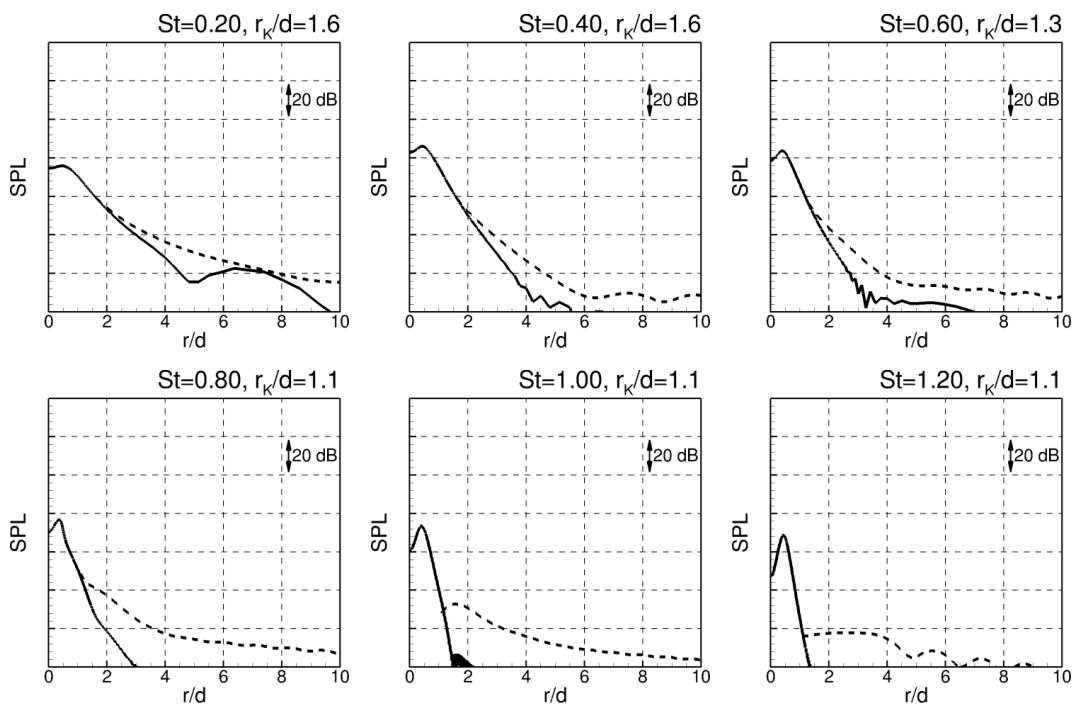


FIG. 10. Near-field radial pressure profile at  $x/d = 3.0$  for the unforced jet; PSE (—); acoustic propagation (---).

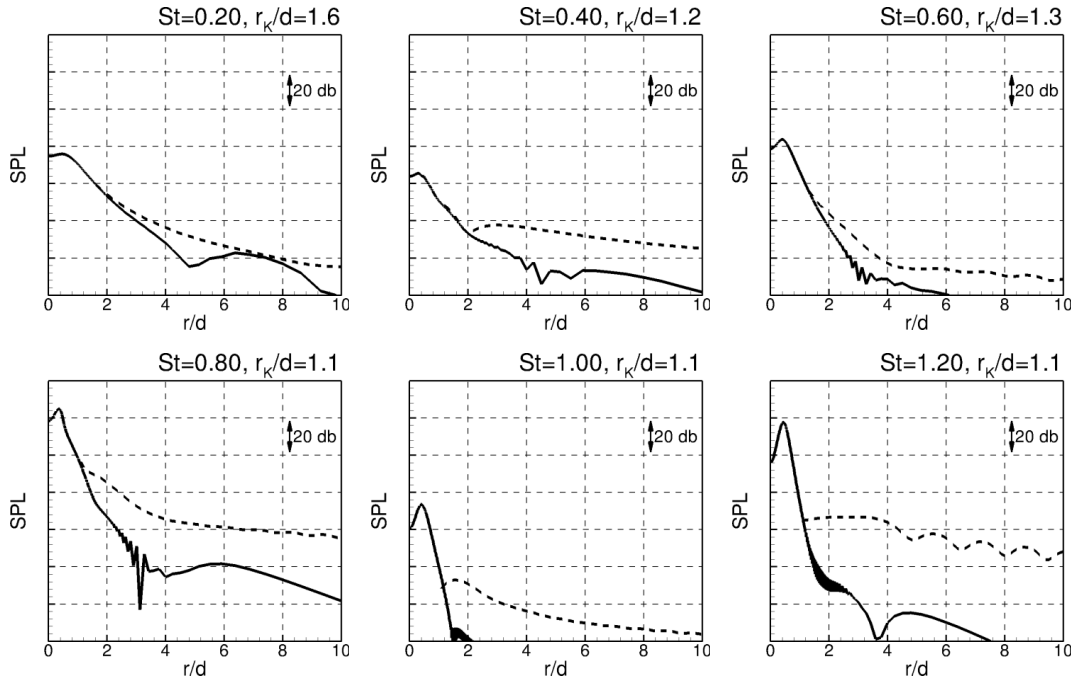


FIG. 11. Near-field radial pressure profiles at  $x/d = 3.0$  for the excited jet; PSE (—); acoustic propagation (---).

imposed on  $St \geq 1.00$  to stay outside of the mixing layer and ensure the validity of the Kirchhoff formulation. One can then notice that the propagation of higher frequencies may not be as accurate as expected and thus only an estimate of the acoustic field will be discussed.

Now that the radial location of the Kirchhoff surfaces is determined for each of the modes, the previous results are propagated to the far-field. The pressure field of the “target” mode  $St = 0.4$  is depicted in Fig. 12 where two cases are presented, the unforced configuration and the favorable excited conditions mentioned above.

In both cases, the radiating lobe resulting from the hydrodynamic instability is clearly visible with a pronounced directivity in the aft region of the jet. The forcing seems to increase the “target” mode angle of directivity, which moves from  $30^\circ$  to  $60^\circ$ . On the other hand, the pressure levels  $|p'_{0,2}|$  are much lower when forcing the difference-frequency mode.

To improve the data analysis, the far-field directivity patterns of the “target” mode are extracted on a circle at  $r/d = 25$  from  $0^\circ$  to  $90^\circ$  and are reported in Fig. 13. The three previous combinations of initial phases of the “killer” modes are depicted to quantify the sensitivity to initial conditions,

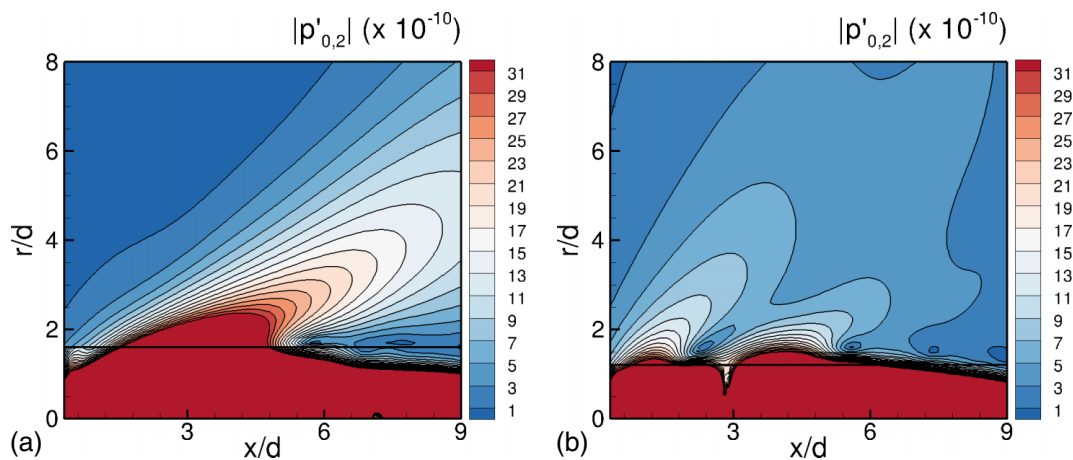


FIG. 12. Pressure field of the “target” mode (0,2) for the unforced jet (a) and for excited jet with the “killer” frequencies  $St = 0.80$  and  $St = 1.20$  (b); (---) Kirchhoff surface location. (a) Unforced jet. (b) Excited jet.



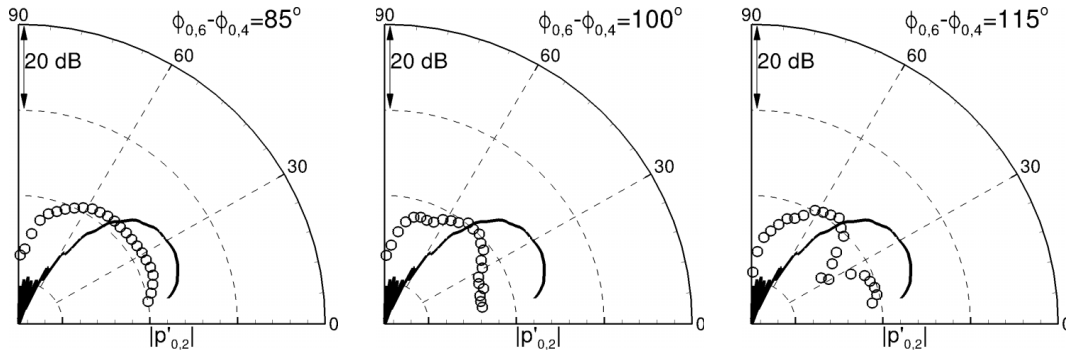


FIG. 13. Pressure level of the mode (0,2) obtained at  $r/d = 25$  for various initial phase differences of the modes (0,4) and (0,6) with the initial amplitude product  $\varepsilon_{0,4} \times \varepsilon_{0,6} = 7 \times 10^{-10}$ ; (○) nonlinear PSE; (—) linear PSE.

so  $\phi_{0,6} - \phi_{0,4} = 85^\circ$ ,  $100^\circ$ , and  $115^\circ$ . A noteworthy change is observed in the angle of directivity and the pressure amplitude of the “target” mode with the initial phase of the “killer” modes. The optimum is found for  $\phi_{0,6} - \phi_{0,4} = 100^\circ$  with a significant 9 dB loss of the noise generated by the “target” mode at the frequency  $St = 0.40$ . It is important to note that the same optimum is found in both the near and far-fields.

However, to decrease the efficiency of the “target” mode, two high frequencies have been amplified and thus may radiate more noise. The overall sound pressure level, which includes all the selected frequencies, is presented in Fig. 14. A noise increase of 33 dB is then highlighted for the forced jet compared to the unexcited jet.

The present results essentially confirm the earlier findings by Suponitsky *et al.*<sup>31</sup> on the idea that nonlinear interaction between two primary instability waves results mainly in a difference frequency mode, but further insight is now provided on the crucial importance of the initial phase of the modes. In fact, when two modes are amplified, low-frequency waves resulting from interactions between primary highly amplified instability waves can be efficient sound radiators in subsonic jets. Nonetheless, and not mentioned in previous work, by carefully setting up amplitudes and phases of two higher frequency modes, the mitigation of the “target” mode noise is possible. On the flip side, the noise induced by the “killer” modes is increased drastically.

## H. Shifting to higher frequency “killer” modes

Because outside of the jet high frequencies are damped faster than low frequencies, shifting the “killer” modes to higher frequency is investigated with the aim to reduce the previous increase in the overall sound pressure level.

The exact same process as before is applied, now forcing  $St = 1.2$  and  $St = 1.6$ , instead of  $St = 0.8$  and  $St = 1.2$ . Once more, only the difference-frequency mode, corresponding to  $St = 0.4$ , is altered while all the other modes are unchanged. An optimum of initial amplitude product is found to be  $\varepsilon_{0,6} \times \varepsilon_{0,8} = 7 \times 10^{-10}$ . The optimum for the initial phase difference is  $\phi_{0,8} - \phi_{0,6} = 115^\circ$ .

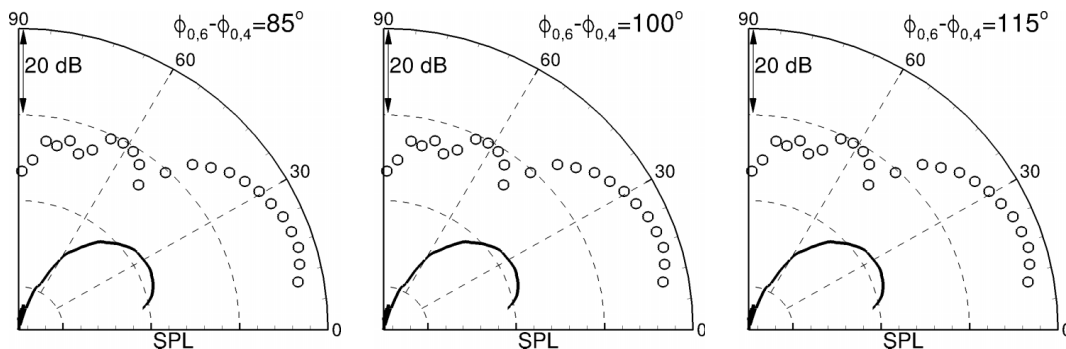


FIG. 14. Overall sound pressure level obtained at  $r/d = 25$  for various initial phase sums; (○) nonlinear PSE; (—) linear PSE.



TABLE VI. Initial amplitudes and phases of modes referring to Fig. 15. Boldface values refer to the forced modes initial conditions.

Case	$\varepsilon_{0,2}(\phi_{0,2})$	$\varepsilon_{0,6}(\phi_{0,6})$	$\varepsilon_{0,8}(\phi_{0,8})$
G1	$1 \times 10^{-7}(0^\circ)$	<b><math>2.5 \times 10^{-5}(0^\circ)</math></b>	<b><math>2.8 \times 10^{-5}(100^\circ)</math></b>
G2	$1 \times 10^{-7}(0^\circ)$	<b><math>2.5 \times 10^{-5}(0^\circ)</math></b>	<b><math>2.8 \times 10^{-5}(115^\circ)</math></b>
G3	$1 \times 10^{-7}(0^\circ)$	<b><math>2.5 \times 10^{-5}(0^\circ)</math></b>	<b><math>2.8 \times 10^{-5}(135^\circ)</math></b>

All the remaining modes, including the “target” mode, are set to initial amplitudes and phases of  $\varepsilon_{m,n} = 1 \times 10^{-7}$  and  $\phi_{m,n} = 0^\circ$ . Once more, as summarized in Table VI, three configurations of initial phase are presented below to quantify sensitivity to initial conditions.

The pressure amplitude of the “target” frequency  $St = 0.40$  along the line  $r/d = 0.5$  is reported in Figure 15. The efficiency of the process in the near pressure field is obvious in all the three cases with a meaningful lessening of the pressure peak value.

Fig. 16 represents the far-field directivity patterns of the “target” mode at  $r/d = 25$ . In this case, the forcing seems much more significant in term of noise reduction with a 15 dB loss, instead of 9 dB previously. The results are still sensitive to initial conditions with a loss of 6 dB for other initial phases.

The overall sound pressure level, including the excited frequencies, is presented in Fig. 17. The noise is still increased but by 19 dB, instead of 33 dB previously. Shifting to even higher frequencies may lead to a further decrease, even to a jet noise mitigation. The idea to excite two higher-frequency “killer” modes seems promising by making use of the difference-frequency mode phenomenon. However, a real optimization process must be performed on real initial jet conditions to ensure the feasibility of the process.

## I. Nonlinear azimuthal interactions

Instead of pursuing our efforts on axisymmetric modes at even higher frequencies, advantage will be taken of the fact that not only high frequencies but also high azimuthal wavenumbers radiate sound less efficiently, as mentioned by Fuchs and Michel.<sup>49</sup>

A similar investigation is then run on azimuthal interactions. Thirty modes are considered with azimuthal wavenumbers going from  $-2$  to  $2$  ( $m_{max} = 2$ ) and frequencies ranging from  $St = 0.20$  to  $1.20$  by step of  $0.20$  ( $n_{max} = 6$ ). The complete routine to minimize the near pressure field is the same as before and will not be detailed. Thereafter, only the main results are presented.

Once more, if single excitation is not relevant with the current purpose, controlling the evolution of a selected “target” mode is made possible through forcing only two “killer” modes ( $m_1, n_1$ ), ( $m_2, n_2$ ). In a similar manner than in frequency interactions where the difference-frequency  $n_1 - n_2$  was found to predominate, the combination  $(m_1 - m_2, n_1 - n_2)$  now prevails over other possible combinations. This is entirely consistent with the analytical model developed by Mankbadi<sup>30</sup> to

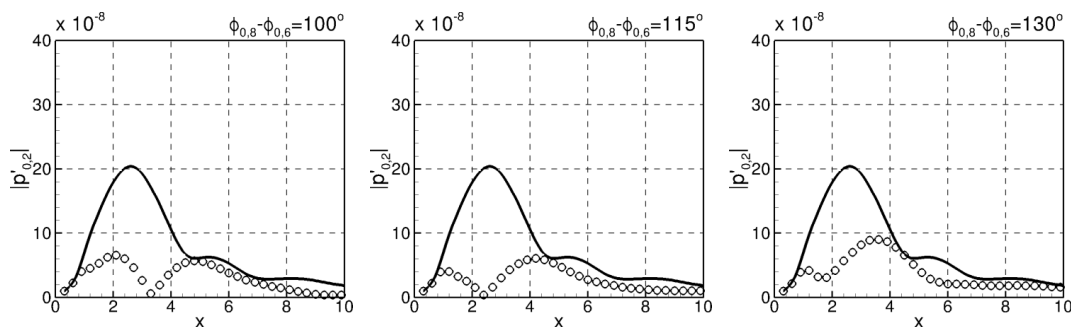


FIG. 15. Pressure amplitude of the “target” mode (0,2) along the line  $r/d = 0.5$  when forcing the modes (0,6) and (0,8) at the initial amplitude product  $\varepsilon_{0,6} \times \varepsilon_{0,8} = 7 \times 10^{-10}$  for various initial phase differences; (○) nonlinear PSE; (—) linear PSE.

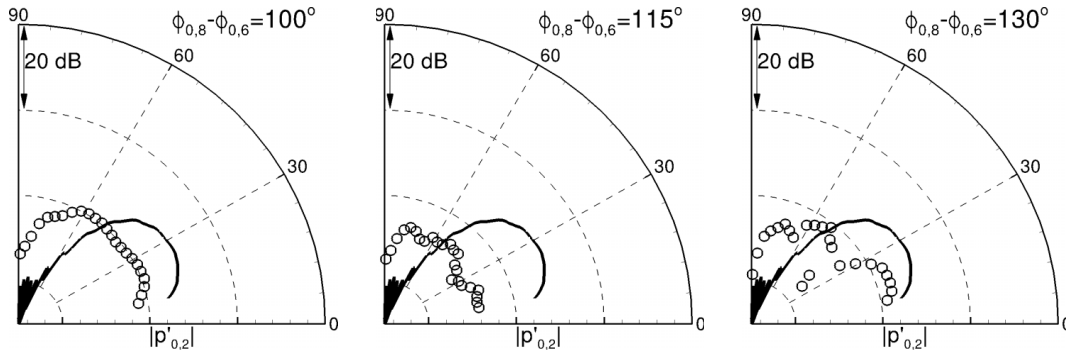


FIG. 16. Pressure level of the mode (0,2) obtained at  $r/d = 25$  for various initial phase sums of the modes (0,6) and (0,8) with the initial amplitude product  $\varepsilon_{0,6} \times \varepsilon_{0,8} = 7 \times 10^{-10}$ ; (○) nonlinear PSE; (—) linear PSE.

study nonlinear wave-wave interactions in turbulent jets. Based on the integrated energy of each scale of motion in a cross section of the jet, he found that two frequency components in the axisymmetric mode can interact with other background frequencies in the axisymmetric mode while two frequency components in a single helical mode cannot, by themselves, amplify other frequency components in the same helical mode. However, combinations of frequency components of helical and axisymmetric modes can amplify other frequencies in other helical modes, which is in agreement with the azimuth and frequency difference phenomena presented here.

The initial amplitude of  $\varepsilon_{m,n} = 1 \times 10^{-7}$  remains assigned to all modes while the “killer” modes (2,4) and (2,6) are forced at higher initial amplitudes, thus altering the “target” mode (0,2) corresponding to the axisymmetric mode at the frequency  $St = 0.40$ .

An optimum in terms of initial amplitudes and phases of the forced modes is sought with the aim of reducing the pressure peak value of the “target” mode. Again, product of initial amplitudes and difference of initial phases are found relevant. The most favorable configuration is got with  $\varepsilon_{2,4} \times \varepsilon_{2,6} = 8 \times 10^{-10}$  and  $\phi_{2,6} - \phi_{2,4} = 90^\circ$ . Pressure amplitude of the “target” mode along the line  $r/d = 0.5$  is presented in Fig. 18(a). Again, the pressure peak value of the “target” mode is reduced, supporting the effectiveness of the “target” instability control by “killer” modes.

Far-field directivity pattern of the “target” mode and overall sound pressure obtained at  $r/d = 25$  are reported in Figs. 18(b) and 18(c), respectively. As expected by the pressure field, the pressure level of the “target” mode is decreased with a 8 dB loss. Although more favorable than the case presented in Sec. IV G, the overall sound pressure is still increased by 18 dB.

Because the aim of the present paper was to investigate the possibility to control a specific “target” mode, the cost function to minimize was the pressure distribution of the initially dominant instability in the near-field. However, now, the interest must go a step further with a focus on jet noise reduction. Nonetheless, in the range of frequencies and azimuthal wavenumbers selected in the present paper, the initial amplitudes of the “killer” modes needed to influence the initially dominant instability were too high and thus dominate the far-field with always an increase in the overall sound pressure.

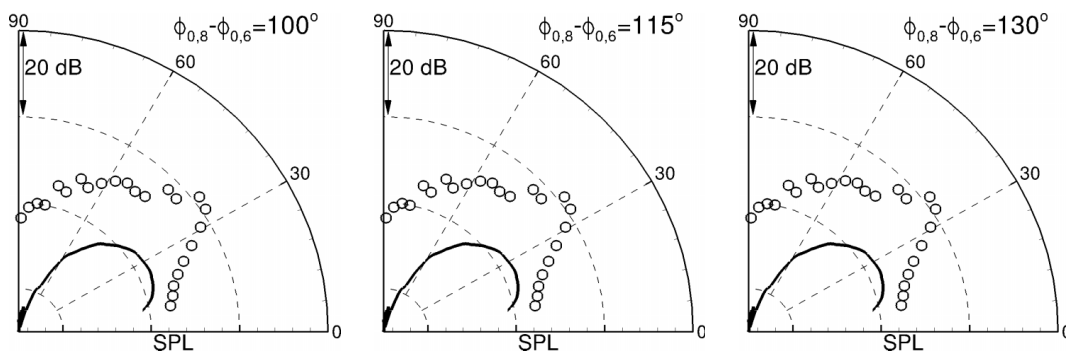


FIG. 17. Overall sound pressure level obtained at  $r/d = 25$  for various initial phase sums; (○) nonlinear PSE; (—) linear PSE.

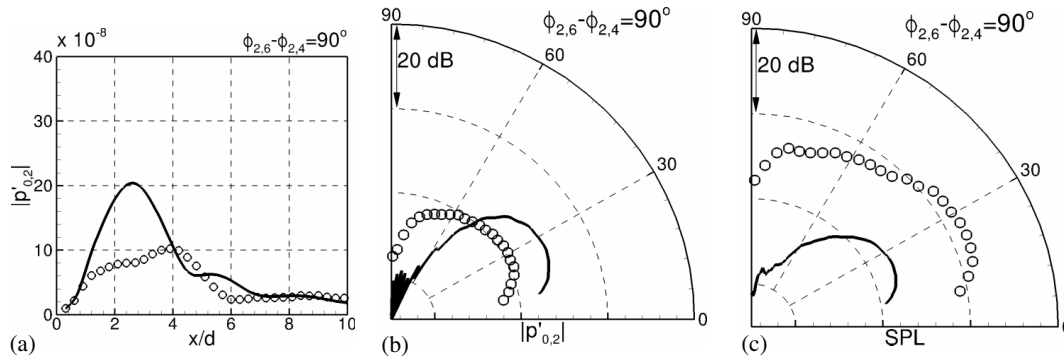


FIG. 18. Pressure amplitude (a) and pressure level (b) of the initially dominant mode (0,2) and overall sound pressure level (c) when forcing the modes (2,4) and (2,6) such that  $\varepsilon_{2,4} \times \varepsilon_{2,6} = 8 \times 10^{-10}$  and  $\phi_{2,6} - \phi_{2,4} = 90^\circ$ ; (o) nonlinear PSE; linear PSE (—).

But we must still underline that exciting azimuthal modes to impact a given “target” mode development has succeeded. It seems as efficient as amplifying axisymmetric modes of higher frequencies with similar results in terms of pressure distribution and pressure level and thus may be promising even if global jet noise mitigation has not been reached yet.

## V. CONCLUSION

PSE approach was used to study nonlinear interactions with forced eigenmodes to control subsonic jet instabilities. Mainly, the objective of the present work was to quantify how modes interact with one another to define proper initial conditions for the recent active control techniques for flow control and noise reduction.

First, the study was restricted to harmonic frequency interactions to clarify the nonlinear underlying mechanism which drives the instabilities evolution. On the one hand, single frequency forcing revealed harmonics growth and thus a broadband jet noise increase. On the other hand, the difference-frequency  $n_1 - n_2$  was found to predominate in the near-field when exciting a jet at two frequencies  $n_1, n_2$ . This phenomenon was investigated to control the evolution of the initially dominant instability, defined as the “target” mode. The two high frequency forced modes, where energy is injected in order to alter the difference-frequency mode behavior, were qualified as “killer” modes. Of particular interest were the initial conditions of the “killer” modes. Not only their initial amplitudes were found critical for the “target” mode development but also their initial phases. Specifically, the product of the “killer” mode initial amplitudes and the difference of their initial phases were key parameters. An optimum was found with the objective of minimizing the near-field pressure peak value of the “target” frequency. The propagation of that PSE solution to the far-field revealed a significant decrease of the initially dominant instability noise with a 15 dB loss. However, the “killer” modes dominate in the far-field due to their needed high initial amplitudes. As a result, the estimated overall sound pressure level was increased by 19 dB. A solution proposed to reduce that drastic increase of the overall sound pressure level is to shift the “killer” modes to even higher frequencies, which are damped faster outside of the jet.

Then, because high azimuthal wavenumbers also radiate sound less efficiently, the same overall process was realized on azimuthal modes. As an extension of the difference-frequency, it was found that amplifying two “killer” modes  $(m_1, n_1), (m_2, n_2)$  influences the combination  $(m_1 - m_2, n_1 - n_2)$ . This result was found to be fully in line with the analytical model developed by Mankbadi.<sup>30</sup> Once more, the behavior of the initially dominant instability was investigated as a function of the initial conditions of the two “killer” modes. Once again, although the needed initial amplitudes of the “killer” modes were too high and thus led to an increase in the overall sound pressure, the near pressure field as well as the radiated noise of the naturally dominant instability were remarkably reduced. It should be noted that in all three cases mentioned previously, the optimal phase difference is found to be around  $100^\circ$ . To the best of our knowledge, the underlying mathematics or physics, which might explain why that is, remains an open question.

In return for a frequency-shift in noise, the present paper supports the approach that the noise mitigation of the initially dominant instability is feasible by means of nonlinear frequency interactions. In addition, sometimes a specific frequency related to jet instabilities may dominate the entire spectrum, which can be harmful or dangerous for the aircraft structure. To prevent such issues, this process might be an appropriate solution.

- <sup>1</sup> M. Lighthill, "On sound generated aerodynamically. I. General theory," *Proc. R. Soc. London, Ser. A* **211**, 564–587 (1952).
- <sup>2</sup> R. Franklin and J. Foxwell, "Correlation in the random pressure field close to a jet," Technical Report No. 3161, Aeronautical Research Council, 1958.
- <sup>3</sup> P. Bradshaw, D. Ferriss, and R. Johnson, "Turbulence in the noise producing region of a circular jet," *J. Fluid Mech.* **19**, 591–624 (1964).
- <sup>4</sup> E. Molloy-Christensen, M. Kolpin, and J. Martuccelli, "Experiments on jet flows and jet noise far-field spectra and directivity patterns," *J. Fluid Mech.* **18**, 285–301 (1964).
- <sup>5</sup> S. Crow and F. Champagne, "Ordered structure in jet turbulence," *J. Fluid Mech.* **48**, 547–591 (1971).
- <sup>6</sup> D. Crighton and P. Huerre, "Shear-layer pressure fluctuations and superdirective acoustic sources," *J. Fluid Mech.* **220**, 355–368 (1990).
- <sup>7</sup> A. Cavalieri, P. Jordan, A. Agarwal, and Y. Gervais, "Jittering wave-packet models for subsonic jet noise," *J. Sound Vib.* **330**, 4474–4492 (2011).
- <sup>8</sup> A. Cavalieri and A. Agarwal, "Coherence decay and its impact on sound radiation by wavepackets," *J. Fluid Mech.* **748**, 399–415 (2014).
- <sup>9</sup> C. Tam, "Jet noise: Since 1952," *Theor. Comput. Fluid Dyn.* **10**, 393–405 (1998).
- <sup>10</sup> T. Colonius and S. Lele, "Computational aeroacoustics: Progress on nonlinear problems of sound generation," *Prog. Aero-naut. Sci.* **40**, 345–416 (2004).
- <sup>11</sup> P. Jordan and Y. Gervais, "Subsonic jet aeroacoustics: Associating experiment, modelling and simulation," *Exp. Fluids* **44**, 1–21 (2008).
- <sup>12</sup> T. Suzuki and T. Colonius, "Instability waves in a subsonic round jet detected using a near-field phased microphone array," *J. Fluid Mech.* **565**, 197–226 (2006).
- <sup>13</sup> A. Cavalieri, G. Daviller, P. Comte, P. Jordan, G. Tadmor, and Y. Gervais, "Using large eddy simulation to explore sound-source mechanisms in jets," *J. Sound Vib.* **330**, 4098–4113 (2011).
- <sup>14</sup> J. Nichols and S. Lele, "Global modes and transient response of a cold supersonic jet," *J. Fluid Mech.* **669**, 225–241 (2011).
- <sup>15</sup> F. Bertolotti and T. Herbert, "Analysis of the linear stability of compressible boundary layers using the PSE," *Theor. Comput. Fluid Dyn.* **3**, 117–124 (1991).
- <sup>16</sup> P. Balakumar, "Prediction of supersonic jet noise," AIAA Paper No. 98-1057, 1998.
- <sup>17</sup> C. Yen and N. Messersmith, "Application of parabolized stability equations to the prediction of jet instabilities," *AIAA J.* **36**, 1541–1544 (1998).
- <sup>18</sup> F. Bertolotti and T. Colonius, "On the noise generated by convected structures in a Mach 0.9, hot, turbulent jet," AIAA Paper 2003-1062, 2003.
- <sup>19</sup> E. Piot, G. Casalis, F. Muller, and C. Bailly, "Investigation of the PSE approach for subsonic and supersonic hot jets. Detailed comparisons with LES and linearized Euler equations results," *Int. J. Aeroacoust.* **5**, 361–393 (2006).
- <sup>20</sup> K. Gudmundsson, "Instability wave models of turbulent jets from round and serrated nozzles," Ph.D. thesis, California Institute of Technology, 2010.
- <sup>21</sup> K. Gudmundsson and T. Colonius, "Instability wave models for the near-field fluctuations of turbulent jets," *J. Fluid Mech.* **689**, 97–128 (2011).
- <sup>22</sup> O. Léon, "Étude du rayonnement acoustique des instabilités hydrodynamiques de jets double-flux avec les équations de stabilité parabolisées (PSE)," Ph.D. thesis, Université de Toulouse, 2012.
- <sup>23</sup> O. Léon and J.-P. Brazier, "Investigation of the near and far pressure fields of dual-stream jets using an Euler-based PSE model," AIAA Paper 2013-2280, 2013.
- <sup>24</sup> M. Samimy, J. Kim, J. Kastner, I. Adamovich, and Y. Utkin, "Active control of high-speed and high-Reynolds-number jets using plasma actuators," *J. Fluid Mech.* **578**, 305–330 (2007).
- <sup>25</sup> M. Kearney-Fischer, J.-H. Kim, and M. Samimy, "A study of Mach wave radiation using active control," *J. Fluid Mech.* **681**, 261–292 (2011).
- <sup>26</sup> G. Raman, E. Rice, and R. Mankbadi, "Saturation and the limit of jet mixing enhancement by single frequency plane wave excitation: Experiment and theory," AIAA Paper No. 88-3613, 1988.
- <sup>27</sup> D. Ronneberger and U. Ackermann, "Experiments on sound radiation due to non-linear interaction of instability waves in a turbulent jet," *J. Sound Vib.* **62**, 121–129 (1979).
- <sup>28</sup> H. Arbey and J. Ffowcs Williams, "Active cancellation of pure tones in an excited jet," *J. Fluid Mech.* **149**, 445–454 (1984).
- <sup>29</sup> G. Raman and E. Rice, "Axisymmetric jet forced by fundamental and subharmonic tones," *AIAA J.* **29**, 1114–1122 (1991).
- <sup>30</sup> R. Mankbadi, "Multifrequency excited jets," *Phys. Fluids A* **3**, 595–605 (1991).
- <sup>31</sup> V. Suponitsky, N. Sandham, and C. Morfey, "Linear and nonlinear mechanisms of sound radiation by instability waves in subsonic jets," *J. Fluid Mech.* **658**, 509–538 (2010).
- <sup>32</sup> V. Kopiev, I. Belyaev, M. Zaytsev, V. Kopiev, and G. Faranosov, "Acoustic control of instability waves in a turbulent jet," *Acoust. Phys.* **59**, 16–26 (2013).
- <sup>33</sup> D. Rodriguez, A. Samanta, A. Cavalieri, T. Colonius, and P. Jordan, "Parabolized stability equation models for predicting large-scale mixing noise of turbulent round jets," AIAA Paper 2011-2838, 2011.
- <sup>34</sup> M. Malik and C. Chang, "Nonparallel and nonlinear stability of supersonic jet flow," *Comput. Fluids* **29**, 327–365 (2000).
- <sup>35</sup> L. Cheung, D. Bodony, and S. Lele, "Noise radiation predictions from jet instability waves using a hybrid nonlinear PSE-acoustic analogy approach," AIAA Paper 2007-3638, 2007.

- <sup>36</sup> M. Huet, "Influence of boundary layers resolution on heated, subsonic, high Reynolds number jet flow and noise," AIAA Paper 2013-2141, 2013.
- <sup>37</sup> P. Monkewitz and K. Sohn, "Absolute instability in hot jets," *AIAA J.* **26**, 911–916 (1988).
- <sup>38</sup> H. Haj-Hariri, "Characteristics analysis of the parabolized stability equations," *Stud. Appl. Math.* **92**, 41–53 (1994). For more information, go to <http://cat.inist.fr/?aModele=afficheN&cpsidt=3348892>.
- <sup>39</sup> Y. Vigneron, J. Rakich, and J. Tannehill, "Calculation of supersonic viscous flow over delta wings with sharp subsonic leading edges," AIAA Paper No. 78-1137, 1978.
- <sup>40</sup> L. Gamet, F. Ducros, F. Nicoud, and T. Poinsot, "Compact finite difference schemes on non-uniform meshes. Application to direct numerical simulations of compressible flows," *Int. J. Numer. Methods Fluids* **29**, 159–191 (1999).
- <sup>41</sup> O. Léon and J.-P. Brazier, "Application of the linear parabolized stability equations to a subsonic coaxial jet," AIAA Paper 2011-2839, 2011.
- <sup>42</sup> K. Gudmundsson and T. Colonius, "Parabolized stability equation models for turbulent jets and their radiated sound," AIAA Paper 2009-3380, 2009.
- <sup>43</sup> J. Brazier, M. Huet, O. Léon, and M. Itasse, "Modal analysis of near-field pressure fluctuation for a cold subsonic jet," in 50th AIAA International Conference: Applied Aerodynamics, 2015.
- <sup>44</sup> T. Troutt and D. McLaughlin, "Experiments on the flow and acoustic properties of a moderate-Reynolds-number supersonic jet," *J. Fluid Mech.* **116**, 123–156 (1982).
- <sup>45</sup> F. Muller, F. Vuillot, G. Rahier, G. Casalis, and E. Piot, "Experimental and numerical investigation of the near field pressure of a high subsonic hot jet," AIAA Paper 2006-2535, 2006.
- <sup>46</sup> S. Bagheri, P. Schlatter, P. Schmid, and D. Henningson, "Global stability of a jet in crossflow," *J. Fluid Mech.* **624**, 33–44 (2009).
- <sup>47</sup> A. Salgado, A. Agarwal, V. Saponitsky, and N. Sandham, "A non-linear PSE-based model for jet noise," AIAA Paper 2010-3969, 2010.
- <sup>48</sup> D. Bechert and E. Pfizenmaier, "On the amplification of broad band jet noise by a pure tone excitation," *J. Sound Vib.* **43**, 581–587 (1975).
- <sup>49</sup> H. Fuchs and U. Michel, "Experimental evidence of turbulence source coherence affecting jet noise," *AIAA J.* **16**, 871–872 (1978).

## 4.2 Complément à l'article : Excitation d'un mode sous-harmonique

Dans la section IV.B. de l'article, l'excitation d'un mode unique est présentée, en l'occurrence celle du mode dominant  $St = 0.4$ . Au fur et à mesure que l'amplitude initiale de ce mode est augmentée, une altération des harmoniques fréquentielles est soulignée, soit les modes  $St = 0.8$  et  $St = 1.2$ . Ainsi, le bruit de jet peut significativement être augmenté par l'excitation d'une fréquence pure, conformément à la littérature. Cependant, la possibilité de réduire l'efficacité acoustique du mode dominant reste envisageable en excitant de façon appropriée son sous-harmonique, en terme d'amplitude et de phase initiale.

Une analyse est donc menée en considérant cette fois quatre modes axisymétriques ( $m = 0$ ) pour des fréquences allant de  $St = 0.2$  à  $St = 0.8$  par pas de 0.2 ( $N = 4$ ). L'amplitude initiale de  $\varepsilon_{m,n} = 1 \times 10^{-7}$  reste assignée à tous les modes, excepté pour le mode « tueur »  $St = 0.2$  qui est soumis à une excitation. De façon similaire aux travaux précédents, le processus de minimisation du champ de pression proche conduit à une amplitude et une phase initiales de  $\varepsilon_{0,1} = 1 \times 10^{-4}$  et  $\phi_{0,1} = 85^\circ$ , comme reporté dans le Tab. 4.1. L'évolution du facteur N de tous les modes est représenté sur la Fig. 4.1. Une fois de plus, l'étude révèle qu'il est possible d'altérer uniquement l'évolution du mode dominant par une excitation du sous-harmonique.

TABLE 4.1 : Amplitude et phase initiale de tous les modes.

$\varepsilon_{0,1} (St = 0.2)$	$\phi_{0,1} (St = 0.2)$	$\varepsilon_{m,n}$	$\phi_{m,n}$
<b><math>1 \times 10^{-4}</math></b>	<b><math>85^\circ</math></b>	$1 \times 10^{-7}$	$0^\circ$

L'amplitude de la perturbation de pression à  $r/d = 0.5$  et le diagramme de directivité à  $r/d = 25$  du mode « cible » ainsi que le niveau de pression global sont présentés sur la Fig. 4.2. Bien que la configuration obtenue soit la plus favorable avec une légère réduction du maximum de la perturbation de pression, un second pic semble émerger au niveau du cône potentiel, suivi d'une augmentation notable de la pression en aval. En effet, le diagramme de directivité présente une augmentation du niveau de pression acoustique du mode « cible » de 1 dB. En prenant en compte l'amplitude initiale du mode « tueur », une augmentation drastique du rayonnement acoustique global est observée. Cette augmentation est de 56 dB sur cette configuration. Dans le but de réduire l'efficacité d'un mode « cible », l'excitation sous-harmonique ne semble donc pas prometteuse, ce qui plaide en faveur d'un contrôle par différence modale.

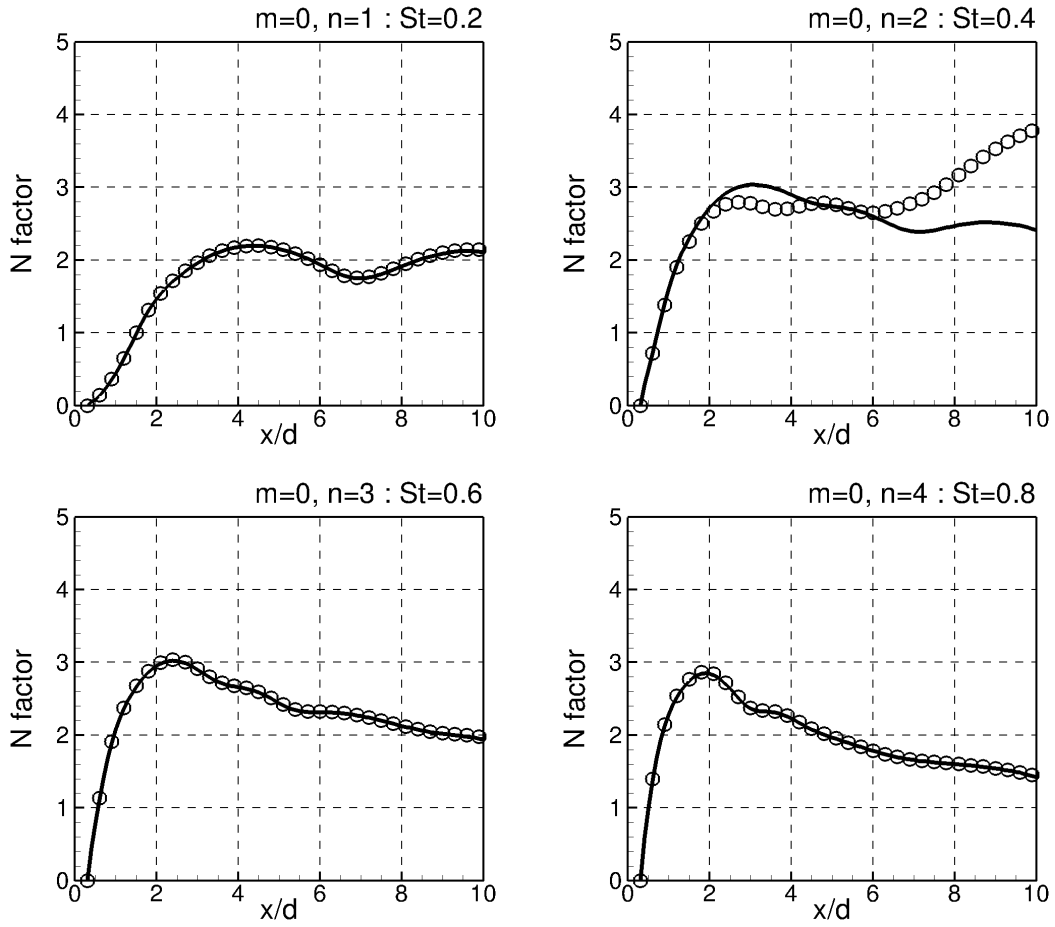


FIGURE 4.1 : Evolution du facteur N lors de l'excitation du mode (0, 1);  
PSE linéaires (—); PSE non linéaires ( $\circ$ ).

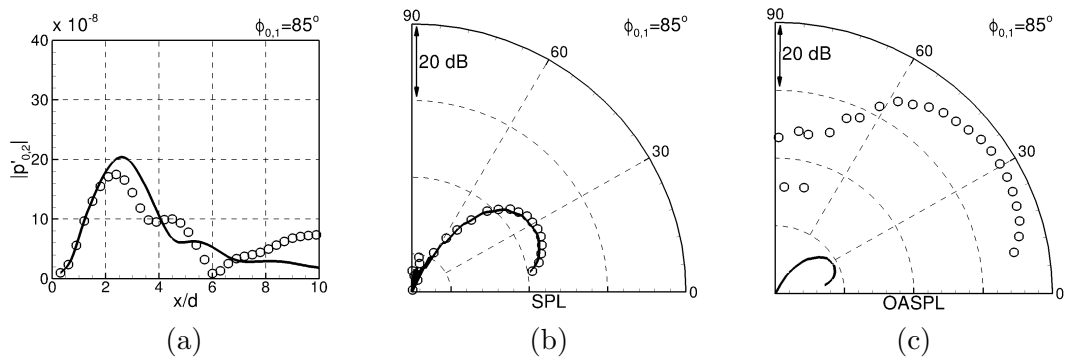


FIGURE 4.2 : Amplitude de pression à  $r/d = 0.5$  (a) et niveau de pression acoustique à  $r/d = 25$  (b) du mode « cible »  $St = 0.4$  et niveau de pression global (c); PSE linéaires (—); PSE non linéaires ( $\circ$ ).



UNE analyse PSE des interactions non linéaires d'un jet excité par un ou plusieurs modes instables a été effectuée dans ce chapitre. Tout d'abord, l'excitation d'un seul mode a été étudiée, provoquant une amplification des harmoniques fréquentielles. On a alors montré qu'il était possible d'altérer l'évolution d'un mode donné en excitant son sous-harmonique. Toutefois, seule une augmentation du niveau de pression acoustique du mode fondamental est observée dans ce cas.

L'excitation simultanée d'un jet à deux fréquences  $n_1, n_2$  a ensuite été explorée où, conformément aux résultats des expériences de [Ronneberger et Ackermann \(1979\)](#), la différence fréquentielle  $n_1 - n_2$  prédomine en champ proche et en champ lointain. Ce phénomène est alors exploité dans le but d'altérer le comportement du mode initialement dominant, défini à cette occasion comme le mode « cible ». Les deux modes de plus haute fréquence, dont l'excitation permet de modifier le mode correspondant à la différence fréquentielle, sont quant à eux qualifiés de modes « tueurs ». Non seulement leur amplitude initiale, mais également leur phase initiale se sont trouvées être cruciales dans le développement du mode « cible ». Précisément, le produit des amplitudes initiales des modes « tueurs » et la différence de leurs phases initiales sont des facteurs essentiels. Un optimum a alors été trouvé avec pour objectif de minimiser l'amplitude maximum de la perturbation de pression du mode « cible » en champ proche. La propagation de la solution PSE en champ lointain a alors révélé une réduction notable du rayonnement acoustique du mode initialement dominant avec une perte de 15 dB. Cependant, l'amplitude initiale requise pour les modes « tueurs » est telle qu'ils dominent en champ lointain. Par conséquent, le niveau de pression acoustique global se trouve être augmenté de 19 dB.

Une solution a été proposée pour limiter cette augmentation. Elle consiste à exciter des modes « tueurs » qui rayonnent moins efficacement en champ lointain. Deux possibilités sont alors envisagées : l'excitation de modes de plus haute fréquence ou de plus haut nombre d'onde azimutal. En effet, dans le prolongement des travaux de [Ronneberger et Ackermann \(1979\)](#), l'étude révèle que l'excitation des modes « tueurs »  $(m_1, n_1)$  et  $(m_2, n_2)$  influence majoritairement la combinaison  $(m_1 - m_2, n_1 - n_2)$ . Dans les deux cas, le contrôle du mode initialement dominant est réalisé, mais bien que le niveau de pression acoustique global soit plus acceptable que précédemment, aucune réduction n'est observée dans cette étude.

En échange d'une augmentation du bruit à haute fréquence, ces travaux soutiennent toutefois l'idée qu'une réduction du bruit de l'onde instable initialement dominante est possible par le biais des interactions non linéaires.





## Développement des PSE linéaires adjointes et application à des cas d'études simples

**B** IEN qu'il soit possible de minimiser le rayonnement acoustique d'un mode donné en excitant un ou plusieurs modes instables d'un jet, la démarche de type « essais-erreurs » adoptée dans le chapitre précédent reste fastidieuse. Pour répondre à ce problème d'optimisation, une technique efficace peut être développée en se basant sur la théorie de l'opérateur adjoint. En particulier, elle permet d'analyser la sensibilité de l'écoulement et de calculer le contrôle optimal à appliquer en vue de minimiser le bruit rayonné. Dans ce chapitre, les PSE linéaires adjointes sont développées. Certaines difficultés associées à cette modélisation sont présentées. Enfin, pour permettre une première appréhension de cet outil, le modèle PSE adjoint est appliqué à des cas d'études simples.

### Sommaire

---

<b>5.1 Modélisation PSE linéaires adjointes . . . . .</b>	<b>132</b>
5.1.1 Optimisation et multiplicateurs de Lagrange . . . . .	132
5.1.2 Contexte de l'étude de sensibilité à l'aide des PSE adjointes . . . . .	133
5.1.3 Équations d'Euler linéarisées compressibles adjointes . . . . .	134
5.1.4 Développement et résolution des PSE linéaires adjointes . . . . .	136
<b>5.2 Applications simples du modèle PSE adjoint . . . . .</b>	<b>140</b>
5.2.1 Principe de la validation . . . . .	140
5.2.2 Caractéristiques du jet incompressible . . . . .	140
5.2.3 Stabilité locale adjointe . . . . .	141
5.2.4 Analyse par PSE adjointes d'un écoulement parallèle incompressible	143
5.2.5 Analyse par PSE adjointes d'un jet incompressible . . . . .	144

---

## 5.1 Modélisation PSE linéaires adjointes

### 5.1.1 Optimisation et multiplicateurs de Lagrange

Dans un premier temps, l'objectif est d'étudier la sensibilité des instabilités hydrodynamiques des jets soumis à des perturbations extérieures, représentées par un terme source de masse, de quantité de mouvement ou d'énergie. Cette analyse est formulée comme un problème d'entrées-sorties avec pour but d'obtenir des informations pertinentes pour le contrôle des instabilités. Pour une telle formulation, la sensibilité peut être vue comme le gradient des sorties par rapport aux entrées. Les techniques d'optimisation basées sur les méthodes de gradient permettent de conduire ce type d'analyse. L'outil principal développé dans ce chapitre s'appuie sur les équations adjointes qui permettent de calculer efficacement le gradient d'une fonctionnelle par rapport à différentes grandeurs, comme il sera vu dans la suite. Les méthodes adjointes offrent une grande diversité d'applications possibles pour les problèmes d'optimisation et de contrôle d'écoulement en mécanique des fluides. En couche limite, elles sont très largement utilisées pour des études de sensibilité (Pralits *et al.* (2000)), de réceptivité (Airiau (2000)), de contrôle optimal (Walther *et al.* (2001), Airiau *et al.* (2003)) ou encore de perturbation optimale (Vermeersch (2009), Lucas (2014)). Récemment, elles ont été appliquées par Ansaldi et Airiau (2015) pour l'étude de la sensibilité des jets subsoniques.

Classiquement, un problème d'optimisation est composé de quatre paramètres : les variables d'état  $\mathbf{q}'$ , les variables de contrôle  $\mathbf{g}$ , la fonction coût  $\mathcal{J}(\mathbf{q}', \mathbf{g})$  et les équations de contrainte  $F(\mathbf{q}', \mathbf{g}) = 0$ . La démarche consiste alors à trouver les variables d'état  $\mathbf{q}'$  et de contrôle  $\mathbf{g}$  qui minimisent la fonction coût  $\mathcal{J}(\mathbf{q}', \mathbf{g})$  tout en vérifiant les équations de contrainte  $F(\mathbf{q}', \mathbf{g}) = 0$ . À partir de ces équations, on peut définir le Lagrangien  $\mathcal{L}(\mathbf{q}', \mathbf{g}, \mathbf{q}^*)$  de sorte que le problème d'optimisation sous contrainte pour  $\mathcal{J}(\mathbf{q}', \mathbf{g})$  devienne un problème sans contrainte sous réserve d'introduire de nouvelles variables  $\mathbf{q}^*$  dites adjointes ou multiplicateurs de Lagrange :

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}', \mathbf{g}, \mathbf{q}^*) = \mathcal{J}(\mathbf{q}', \mathbf{g}) - \langle F(\mathbf{q}', \mathbf{g}), \mathbf{q}^* \rangle \quad (5.1)$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  désigne un produit scalaire. Le problème est alors de déterminer les variables d'état  $\mathbf{q}'$ , de contrôle  $\mathbf{g}$  et adjointes  $\mathbf{q}^*$  qui assurent la stationnarité du Lagrangien  $\mathcal{L}(\mathbf{q}', \mathbf{g}, \mathbf{q}^*)$ . Une condition nécessaire consiste alors à annuler les variations du Lagrangien par rapport à chacune des variables indépendantes en utilisant la différentiabilité au sens de Fréchet, avec par exemple dans la direction  $\delta \mathbf{q}'$  :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}'} \delta \mathbf{q}' = \lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{\mathcal{L}(\mathbf{q}' + \zeta \delta \mathbf{q}') - \mathcal{L}(\mathbf{q}')}{\zeta} \quad (5.2)$$

où  $\zeta$  est un petit paramètre. Les variations du Lagrangien s'expriment alors comme :

$$d\mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}'} \delta \mathbf{q}' + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{g}} \delta \mathbf{g} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}^*} \delta \mathbf{q}^* \quad (5.3)$$

Ainsi, dans la direction des variables d'état  $\delta \mathbf{q}'$ , l'équation (5.1) donne :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}'} \delta \mathbf{q}' = \left\langle \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \mathbf{q}'}, \delta \mathbf{q}' \right\rangle - \left\langle \mathbf{q}^*, \frac{\partial F}{\partial \mathbf{q}'} \delta \mathbf{q}' \right\rangle = \left\langle \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \mathbf{q}'}, \delta \mathbf{q}' \right\rangle - \left\langle \left( \frac{\partial F}{\partial \mathbf{q}'} \right)^* \mathbf{q}^*, \delta \mathbf{q}' \right\rangle = 0 \quad (5.4)$$

avec  $(\cdot)^*$  l'opérateur adjoint. Finalement, en appliquant une démarche équivalente dans la direction des variables de contrôle  $\delta \mathbf{g}$  et des variables adjointes  $\delta \mathbf{q}^*$ , les conditions suivantes doivent être vérifiées :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}^*} = 0 \Rightarrow F(\mathbf{q}', \mathbf{g}) = 0 : \text{équations de contrainte} \quad (5.5a)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{g}} = 0 \Rightarrow \left( \frac{\partial F}{\partial \mathbf{g}} \right)^* \mathbf{q}^* - \left( \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \mathbf{g}} \right) = 0 : \text{conditions d'optimalité} \quad (5.5b)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}'} = 0 \Rightarrow \left( \frac{\partial F}{\partial \mathbf{q}'} \right)^* \mathbf{q}^* - \left( \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \mathbf{q}'} \right) = 0 : \text{équations adjointes} \quad (5.5c)$$

Un système d'optimalité est ainsi obtenu dont la résolution permet d'obtenir les variables d'état et de contrôle optimales. Il est alors possible de calculer le gradient de la fonctionnelle coût par rapport aux variables de contrôle prédéfinies.

### 5.1.2 Contexte de l'étude de sensibilité à l'aide des PSE adjointes

L'objectif de ces travaux est de localiser les zones de l'écoulement qui, soumises à une perturbation extérieure, sont les plus susceptibles de modifier le développement des ondes d'instabilité. Une première approche consiste à réaliser deux calculs directs, avec et sans perturbation extérieure. L'effet de la perturbation sur l'écoulement peut alors être quantifié en calculant la différence entre les deux solutions obtenues. Pour mener à terme le calcul du gradient complet, le temps total est alors égal au produit entre le nombre de paramètres de contrôle et le temps de calcul nécessaire pour résoudre chaque configuration. L'approche adjointe prend alors tout son sens, par son coût numérique relativement faible, puisqu'elle permet de déterminer la sensibilité des instabilités à une perturbation en résolvant une seule fois les équations directes et adjointes.

Comme précisé par [Gunzburger \(1998, 2000\)](#), un choix doit être fait avant de développer l'approche adjointe. La première possibilité, dite de l'adjoint discret, consiste à discrétiser dans un premier temps les équations du problème continu puis à déterminer l'adjoint du problème discret. Une solution exacte du problème discret est alors obtenue. La seconde, dite de l'adjoint continu, consiste à déterminer les équations adjointes du problème continu, puis à les discrétiser. Cette fois, la solution obtenue n'est pas une solution exacte des problèmes continu et discret. Il est donc fondamental de souligner

que les deux approches ne sont pas équivalentes puisque les opérations de discrétisation et de dérivation de l'adjoint ne sont pas commutatives. En revanche, les deux approches conduisent naturellement à une approximation de l'adjoint du problème continu.

La démarche adoptée ici consiste à développer l'adjoint continu des PSE linéaires. Une telle approche a été appliquée par [Pralits \*et al.\* \(2000\)](#) et par [Ansaldi et Airiau \(2015\)](#) dans les cas respectifs des couches limites et des jets subsoniques. Toutefois, l'approche présentée dans ce chapitre diffère de celle employée par [Ansaldi et Airiau \(2015\)](#), qui est plus générale. Le problème d'optimisation est alors conditionné par le choix de la fonction coût  $\mathcal{J}$ . De manière similaire aux travaux de [Ansaldi et Airiau \(2015\)](#), la fonction coût  $\mathcal{J}$  choisie correspond à l'énergie associée aux perturbations de vitesse, de masse volumique et de pression, définie à la limite aval  $x_f$  du domaine :

$$\mathcal{J}(x_f) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \mathbf{q}'^\dagger \mathbf{q}' dr \quad (5.6)$$

Bien d'autres formulations de la fonction coût  $\mathcal{J}$  peuvent être envisagées, notamment celle développée dans le domaine fréquentiel par [Schulze \*et al.\* \(2011\)](#) pour la réduction du bruit de jet.

### 5.1.3 Équations d'Euler linéarisées compressibles adjointes

De façon similaire aux travaux de [Airiau \(2000\)](#), la démarche adoptée ici consiste à déterminer l'adjoint des équations d'Euler linéarisées compressibles puis à appliquer le formalisme PSE avant de discrétiser le système d'équations obtenu. Pour cela, on choisit un produit scalaire qui définit une norme sur  $\mathbb{R}$  :

$$\forall \zeta(x, r, \theta, t), \forall \psi(x, r, \theta, t), \langle \zeta, \psi \rangle = \int_{x_0}^{x_f} \int_{r_1}^{r_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{t_1}^{t_2} \zeta^\dagger \psi r dx dr d\theta dt \quad (5.7)$$

De par son caractère local, la fonction coût  $\mathcal{J}$  n'interviendra qu'au niveau des conditions aux limites en  $x = x_f$  et peut donc être négligée dans un premier temps.

À partir des équations d'Euler linéarisées :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \bar{u}_x \frac{\partial \rho'}{\partial x} + \bar{u}_r \frac{\partial \rho'}{\partial r} + \bar{\rho} \frac{\partial u'_x}{\partial x} + \bar{\rho} \frac{\partial u'_r}{\partial r} + \frac{\bar{\rho}}{r} u'_r + \frac{\bar{\rho}}{r} \frac{\partial u'_\theta}{\partial \theta} \\ + \rho' \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} + \frac{\rho'}{r} \bar{u}_r + \rho' \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial r} + u'_x \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x} + u'_r \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial r} = 0 \end{aligned} \quad (5.8a)$$

$$\bar{\rho} \frac{\partial u'_x}{\partial t} + \bar{\rho} \bar{u}_x \frac{\partial u'_x}{\partial x} + \bar{\rho} \bar{u}_r \frac{\partial u'_x}{\partial r} + \bar{\rho} u'_r \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial r} + \bar{\rho} u'_x \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} + \frac{\partial p'}{\partial x} = 0 \quad (5.8b)$$

$$\bar{\rho} \frac{\partial u'_r}{\partial t} + \bar{\rho} \bar{u}_x \frac{\partial u'_r}{\partial x} + \bar{\rho} \bar{u}_r \frac{\partial u'_r}{\partial r} + \bar{\rho} u'_r \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial r} + \bar{\rho} u'_x \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial x} + \frac{\partial p'}{\partial r} = 0 \quad (5.8c)$$

$$\bar{\rho} \frac{\partial u'_\theta}{\partial t} + \bar{\rho} \bar{u}_x \frac{\partial u'_\theta}{\partial x} + \bar{\rho} \bar{u}_r \frac{\partial u'_\theta}{\partial r} + \bar{\rho} \frac{u'_\theta \bar{u}_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial p'}{\partial \theta} = 0 \quad (5.8d)$$

$$\begin{aligned} \bar{\rho} M_j^2 \frac{\partial p'}{\partial t} + \bar{\rho} M_j^2 \bar{u}_x \frac{\partial p'}{\partial x} + \bar{\rho} M_j^2 \bar{u}_r \frac{\partial p'}{\partial r} - \frac{\partial \rho'}{\partial t} - \bar{u}_x \frac{\partial \rho'}{\partial x} - \bar{u}_r \frac{\partial \rho'}{\partial r} \\ - u'_x \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x} - u'_r \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial r} = 0 \end{aligned} \quad (5.8e)$$

le Lagrangien est défini comme :

$$\mathcal{L} = - \int_{x_0 r_1 \theta_1 t_1}^{x_f r_2 \theta_2 t_2} \left[ (5.8a) p^{\star \dagger} + (5.8b) u_x^{\star \dagger} + (5.8c) u_r^{\star \dagger} + (5.8d) u_\theta^{\star \dagger} + (5.8e) \rho^{\star \dagger} \right] r dx dr d\theta dt \quad (5.9)$$

La dérivation du Lagrangien par rapport aux variables adjointes conduit aux équations directes. En revanche, la dérivation par rapport aux variables directes permet d'obtenir le système adjoint :

$$\bar{\rho} M_j^2 \frac{\partial \rho^{\star \dagger}}{\partial t} + \frac{\partial u_x^{\star \dagger}}{\partial x} + \bar{\rho} \bar{u}_x M_j^2 \frac{\partial \rho^{\star \dagger}}{\partial x} + \frac{\partial u_r^{\star \dagger}}{\partial r} + \bar{\rho} \bar{u}_r M_j^2 \frac{\partial \rho^{\star \dagger}}{\partial r} + \frac{u_r^{\star \dagger}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta^{\star \dagger}}{\partial \theta} = 0 \quad (5.10a)$$

$$\bar{\rho} \frac{\partial u_x^{\star \dagger}}{\partial t} + \bar{\rho} \bar{u}_x \frac{\partial u_x^{\star \dagger}}{\partial x} + \bar{\rho} \frac{\partial p^{\star \dagger}}{\partial x} + \bar{\rho} \bar{u}_r \frac{\partial u_x^{\star \dagger}}{\partial r} + \rho^{\star \dagger} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x} - \bar{\rho} u_r^{\star \dagger} \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial x} - \bar{\rho} u_x^{\star \dagger} \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} = 0 \quad (5.10b)$$

$$\bar{\rho} \frac{\partial u_r^{\star \dagger}}{\partial t} + \bar{\rho} \bar{u}_x \frac{\partial u_r^{\star \dagger}}{\partial x} + \bar{\rho} \frac{\partial p^{\star \dagger}}{\partial r} + \bar{\rho} \bar{u}_r \frac{\partial u_r^{\star \dagger}}{\partial r} + \rho^{\star \dagger} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial r} - \bar{\rho} u_r^{\star \dagger} \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial r} - \bar{\rho} u_x^{\star \dagger} \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial r} = 0 \quad (5.10c)$$

$$\bar{\rho} \frac{\partial u_\theta^{\star \dagger}}{\partial t} + \bar{\rho} \bar{u}_x \frac{\partial u_\theta^{\star \dagger}}{\partial x} + \bar{\rho} \bar{u}_r \frac{\partial u_\theta^{\star \dagger}}{\partial r} + \frac{\bar{\rho}}{r} \frac{\partial p^{\star \dagger}}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \bar{\rho} \bar{u}_r u_\theta^{\star \dagger} = 0 \quad (5.10d)$$

$$-\frac{\partial \rho^{\star \dagger}}{\partial t} + \frac{\partial p^{\star \dagger}}{\partial t} - \bar{u}_x \frac{\partial \rho^{\star \dagger}}{\partial x} + \bar{u}_x \frac{\partial p^{\star \dagger}}{\partial x} - \bar{u}_r \frac{\partial \rho^{\star \dagger}}{\partial r} + \bar{u}_r \frac{\partial p^{\star \dagger}}{\partial r} = 0 \quad (5.10e)$$

L'annulation des termes de bord conduit à la détermination des conditions aux limites où seules celles sur  $x$  et  $r$  sont exploitées :

– pour  $x = x_0$  et  $x = x_f$  :

$$\begin{aligned} \left( u_x^{\star \dagger} + \bar{\rho} \bar{u}_x M_j^2 \rho^{\star \dagger} \right) p' + \left( \bar{\rho} u'_x + \bar{u}_x \rho' \right) p^{\star \dagger} \\ + \left( u'_x u_x^{\star \dagger} + u'_r u_r^{\star \dagger} + u'_\theta u_\theta^{\star \dagger} \right) \bar{\rho} \bar{u}_x - \bar{u}_x \rho' \rho^{\star \dagger} = 0 \end{aligned} \quad (5.11)$$

– pour  $r = r_1$  et  $r = r_2$  :

$$\begin{aligned} \left( u_r^{\star \dagger} + \bar{\rho} \bar{u}_r M_j^2 \rho^{\star \dagger} \right) p' + \left( \bar{\rho} u'_r + \bar{u}_r \rho' \right) p^{\star \dagger} \\ + \left( u'_x u_x^{\star \dagger} + u'_r u_r^{\star \dagger} + u'_\theta u_\theta^{\star \dagger} \right) \bar{\rho} \bar{u}_r + \bar{u}_r \rho' \rho^{\star \dagger} = 0 \end{aligned} \quad (5.12)$$

#### 5.1.4 Développement et résolution des PSE linéaires adjointes

De manière similaire à l'approche PSE classique, il est possible de supposer que les variables adjointes  $\mathbf{q}^* = [u_x^*, u_r^*, u_\theta^*, \rho^*, p^*]^T$  peuvent être décomposées en une fonction d'amplitude  $\hat{\mathbf{q}}^*$  lentement variable en  $x$  et un terme ondulatoire rapide :

$$\mathbf{q}^*(x, r, \theta, t) = \hat{\mathbf{q}}^*(x, r) \exp \left[ i \left( \int_{x_f}^x \alpha^*(\xi) d\xi + m\theta - n\omega t \right) \right] \quad (5.13)$$

avec  $\alpha^*$  le nombre d'onde local. La forme modale des perturbations (5.13) est ensuite introduite dans les équations d'Euler linéarisées adjointes (5.10). Un système d'équations linéaires homogène est obtenu, portant sur le terme d'amplitude  $\hat{\mathbf{q}}^*$  lentement variable. Ce système d'équations peut être mis sous forme matricielle :

$$(\mathbf{A}^* + \mathbf{B}^*) \cdot \hat{\mathbf{q}}^* + \mathbf{C}^* \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{q}}^*}{\partial x} + \mathbf{D}^* \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{q}}^*}{\partial r} = 0 \quad (5.14)$$

avec

$$\mathbf{A}^* = \alpha^*(x) \mathbf{A}_0^* + m \mathbf{A}_1^* + n \omega \mathbf{A}_2^* \quad (5.15)$$

L'ensemble des matrices  $\mathbf{A}_0^*$ ,  $\mathbf{A}_1^*$ ,  $\mathbf{A}_2^*$ ,  $\mathbf{B}^*$ ,  $\mathbf{C}^*$  et  $\mathbf{D}^*$  sont alors uniquement fonction du champ de base et de ses dérivées axiales et radiales, et restent inchangées d'un mode à un autre. L'expression analytique de ces matrices est explicitée ci-dessous :

$$\mathbf{A}_0^* = -i \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \bar{\rho} \bar{u}_x M_j^2 & 0 \\ \bar{\rho} \bar{u}_x & 0 & 0 & 0 & \bar{\rho} \\ 0 & \bar{\rho} \bar{u}_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\rho} \bar{u}_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\bar{u}_x M_j^2 & \bar{u}_x M_j^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_1^* = -\frac{i}{r} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{\rho} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_2^* = i \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \bar{\rho} M_j^2 & 0 \\ \bar{\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\rho} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -M_j^2 & M_j^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}^* = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{r} & 0 & 0 & 0 \\ \bar{\rho} \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} & \bar{\rho} \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial x} & 0 & -\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x} & 0 \\ \bar{\rho} \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial r} & \bar{\rho} \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial r} & 0 & -\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}^* = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & -\bar{\rho} \bar{u}_x M_j^2 & 0 \\ -\bar{\rho} \bar{u}_x & 0 & 0 & 0 & -\bar{\rho} \\ 0 & -\bar{\rho} \bar{u}_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\bar{\rho} \bar{u}_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{u}_x M_j^2 & -\bar{u}_x M_j^2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{D}^* = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -\bar{\rho} \bar{u}_r M_j^2 & 0 \\ -\bar{\rho} \bar{u}_r & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\bar{\rho} \bar{u}_r & 0 & 0 & -\bar{\rho} \\ 0 & 0 & -\bar{\rho} \bar{u}_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{u}_r M_j^2 & -\bar{u}_r M_j^2 \end{bmatrix}$$

Le système (5.14) sera appelé système PSE adjoint. Au même titre que le système PSE linéaire direct, ce dernier peut être rendu parabolique mais cette fois dans la direction amont de l'écoulement.

Bien qu'inexploitée dans les présents travaux, une autre possibilité consiste à déterminer directement l'adjoint du système matriciel PSE linéaire. L'opérateur adjoint est alors obtenu en réalisant une intégration par partie du produit scalaire :

$$\left\langle \mathbf{q}^*, (\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot \hat{\mathbf{q}} + \mathbf{C} \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{q}}}{\partial x} + \mathbf{D} \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{q}}}{\partial r} \right\rangle \quad (5.16)$$

ce qui conduit à

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_f} \int_{r_1}^{r_2} \mathbf{q}^{*\dagger} \left[ (\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot \hat{\mathbf{q}} + \mathbf{C} \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{q}}}{\partial x} + \mathbf{D} \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{q}}}{\partial r} \right] dr dx = \\ \int_{x_0}^{x_f} \int_{r_1}^{r_2} \left[ (\mathbf{A} + \mathbf{B})^* \cdot \hat{\mathbf{q}}^* + \mathbf{C}^* \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{q}}^*}{\partial x} + \mathbf{D}^* \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{q}}^*}{\partial r} \right]^H \mathbf{q} dr dx \\ + \int_{x_0}^{x_f} \left[ \mathbf{q}^{*H} \cdot \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{q}} \right]_{r_1}^{r_2} dx + \int_{r_1}^{r_2} \left[ \mathbf{q}^{*H} \cdot \mathbf{C} \cdot \hat{\mathbf{q}} \right]_{x_0}^{x_f} dr \end{aligned} \quad (5.17)$$



avec  $H$  le transconjugué et

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^* = (\mathbf{A} + \mathbf{B})^H - \left( \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial x} \right)^H - \left( \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial r} \right)^H \quad (5.18)$$

$$\mathbf{C}^* = -\mathbf{C}^H \quad (5.19)$$

$$\mathbf{D}^* = -\mathbf{D}^H$$

La première intégrale permet d'obtenir les équations adjointes :

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^* \cdot \hat{\mathbf{q}}^* + \mathbf{C}^* \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{q}}^*}{\partial x} + \mathbf{D}^* \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{q}}^*}{\partial r} = 0 \quad (5.20)$$

Les deux dernières intégrales, quant à elles, correspondent aux conditions aux limites du problème adjoint en  $x$  et en  $r$ . À noter que les matrices  $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^*$ ,  $\mathbf{C}^*$  et  $\mathbf{D}^*$  sont différentes de celles de l'équation (5.14). Cette méthode est notamment celle utilisée par [Ansaldi et Airiau \(2015\)](#), en plus d'avoir inclus la condition de normalisation dans le Lagrangien.

Ici, de manière similaire à l'approche PSE, une condition de normalisation est introduite afin de garantir l'évolution axiale lente des variables adjointes :

$$N^* = \int_0^\infty \left( \hat{u}_x^* \frac{\partial \hat{u}_x^*}{\partial x} + \hat{u}_r^* \frac{\partial \hat{u}_r^*}{\partial x} + \hat{u}_\theta^* \frac{\partial \hat{u}_\theta^*}{\partial x} \right) dr = 0 \quad (5.21)$$

Concernant les conditions aux limites, l'expression (5.12) se simplifie à la fois sur l'axe et en champ lointain en imposant  $\bar{u}_r = 0$  :

$$u_r^{*\dagger} p' + \bar{\rho} u_r' p^{*\dagger} = 0 \quad (5.22)$$

À partir des conditions aux limites des équations directes, il est ainsi possible de définir les conditions aux limites à appliquer aux équations adjointes. Sur l'axe, trois conditions sont retrouvées en fonction du nombre d'onde azimutal :

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_r' = 0 \Rightarrow \frac{\partial \hat{u}_x^*}{\partial r} = \hat{u}_r^* = \hat{u}_\theta^* = \frac{\partial \hat{\rho}^*}{\partial r} = \frac{\partial \hat{p}^*}{\partial r} = 0 & : \text{ pour } m = 0 \\ p' = 0 \Rightarrow \hat{u}_x^* = \frac{\partial \hat{u}_r^*}{\partial r} = \frac{\partial \hat{u}_\theta^*}{\partial r} = \hat{\rho}^* = \hat{p}^* = 0 & : \text{ pour } |m| = 1 \\ u_r' = p' = 0 \Rightarrow \hat{u}_x^* = \hat{u}_r^* = \hat{u}_\theta^* = \hat{\rho}^* = \hat{p}^* = 0 & : \text{ pour } |m| \geq 2 \end{array} \right. \quad (5.23)$$

En champ lointain, le comportement asymptotique de  $p'$  laisse supposer un comportement similaire pour  $p^*$ . En effet, le système PSE adjoint (5.14) peut être simplifié en considérant le milieu ambiant au repos, soit  $\bar{u}_x = \bar{u}_r = \bar{u}_\theta = 0$  :

$$-i n \omega \bar{\rho} M_j^2 \hat{\rho}^* - \frac{\partial \hat{u}_x^*}{\partial x} + i \alpha^* \hat{u}_x^* - \frac{\partial \hat{u}_r^*}{\partial r} - \frac{1}{r} \hat{u}_r^* + \frac{i m}{r} \hat{u}_\theta^* = 0 \quad (5.24a)$$

$$-i n \omega \bar{\rho} \hat{u}_x^* - \bar{\rho} \frac{\partial \hat{p}^*}{\partial x} + i \bar{\rho} \alpha^* \hat{p}^* = 0 \quad (5.24b)$$

$$-i n \omega \bar{\rho} \hat{u}_r^* - \bar{\rho} \frac{\partial \hat{p}^*}{\partial r} = 0 \quad (5.24c)$$

$$-i n \omega \bar{\rho} \hat{u}_\theta^* + \frac{i m}{r} \bar{\rho} \hat{p}^* = 0 \quad (5.24d)$$

$$i n \omega M_j^2 \hat{\rho}^* - i n \omega M_j^2 \hat{p}^* = 0 \quad (5.24e)$$

De façon similaire au calcul direct, les équations précédentes peuvent être simplifiées en considérant comme négligeables les variations axiales des termes d'amplitudes en champ lointain, soit  $\partial \hat{p}^* / \partial x$  et  $\partial \hat{u}_x^* / \partial x$ . Une équation de Bessel pour  $\hat{p}^*$  est alors obtenue :

$$\frac{\partial^2 \hat{p}^*}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{p}^*}{\partial r} + \left( \bar{\rho} n^2 \omega^2 M_j^2 + \frac{m^2}{r^2} - \alpha^{*2} \right) \hat{p}^* = 0 \quad (5.25)$$

La solution de cette équation est une combinaison linéaire des fonctions de Hankel  $H_{-m}^{(1)}$  et  $H_{-m}^{(2)}$  où seule la solution asymptotiquement décroissante radialement est physiquement acceptable. Ainsi, loin du jet,  $\hat{p}^*$  prend la forme d'une fonction de Hankel du premier type d'ordre  $-m$  :

$$\hat{p}^*(r) = H_{-m}^{(1)}(i\lambda r) = H_m^{(1)}(i\lambda r) \exp(i m \pi) \quad (5.26)$$

Finalement, en s'appuyant sur le comportement asymptotique de  $H_m^{(1)}$  en champ lointain, la relation suivante est appliquée sur la frontière :

$$\frac{\partial \hat{p}^*}{\partial r} + \left( \lambda - \frac{1}{2r} \right) \hat{p}^* = 0 \quad (5.27)$$

avec  $\lambda^2 = \alpha^{*2} - \bar{\rho} n^2 \omega^2 M_j^2$  tel que  $\text{Re}(\lambda) > 0$ . Au signe près, la condition aux limites en champ lointain du système direct est retrouvée.

Le système discret des équations (5.14) est obtenu en combinant le schéma compact de Gamet *et al.* (1999) dans la direction radiale avec un schéma d'Euler implicite dans la direction axiale :

$$\left( (\mathbf{A}_j + \mathbf{B}_j)^* + \frac{\mathbf{C}_j^*}{\Delta x} + \mathbf{D}_j^* \cdot \mathbf{\Lambda}_j \right) \cdot \hat{\mathbf{q}}_j^* = \frac{\mathbf{C}_j^*}{\Delta x} \cdot \hat{\mathbf{q}}_{j-1}^* \quad (5.28)$$

où la matrice de dérivation radiale finale  $\mathbf{\Lambda}_j$  est identique à celle développée dans l'approche PSE linéaire.

Les conditions initiales, pour la procédure de marche en  $x$  dans la direction amont de l'écoulement, sont quant à elles déterminées à partir de la dérivation de la fonction coût par rapport aux variables directes et à la condition aux limites en  $x = x_f$ .

Finalement, les variables adjointes sont calculées en résolvant de manière itérative le système (5.28) où la variable adjointe  $\alpha^*$  est actualisée à chaque itération en utilisant

une méthode de Newton-Raphson basée sur la condition de normalisation (5.21).

## 5.2 Applications simples du modèle PSE adjoint

### 5.2.1 Principe de la validation

Dans cette section, la démarche consiste à vérifier le comportement des équations adjointes seules, sans couplage avec le système direct. Pour cela, la fonction coût est laissée de côté, au même titre que les variables de contrôle. Ainsi, l'initialisation du calcul PSE adjoint est réalisée par un calcul de stabilité locale adjointe en  $x = x_f$ .

### 5.2.2 Caractéristiques du jet incompressible

Pour simplifier l'étude proposée dans ce chapitre, le modèle PSE adjoint est appliqué à un cas de jet incompressible étudié par Yen et Messersmith (1998), Piot *et al.* (2006) et Léon (2012), représentatif des expériences de Crow et Champagne (1971). L'écoulement de base est défini analytiquement par :

$$\bar{u}_x = \frac{1}{2} \left( 1 + \tanh \left[ \frac{1}{4\Theta(x)} \left( \frac{1}{2r} - 2r \right) \right] \right) \quad (5.29)$$

$$\bar{\rho} = 1 \quad (5.30)$$

avec  $\Theta(x) = 0.03x + 0.02$  l'épaisseur de quantité de mouvement de la couche de mélange adimensionnée par le diamètre de la tuyère  $d$ . De manière analogue aux développements du chapitre 3.2, le champ de vitesse radiale  $\bar{u}_r$  est obtenu par résolution de l'équation de continuité. Le profil initial en  $x/d = 0$  et les contours de vitesse axiale moyenne sont représentés sur la Fig. 5.1.

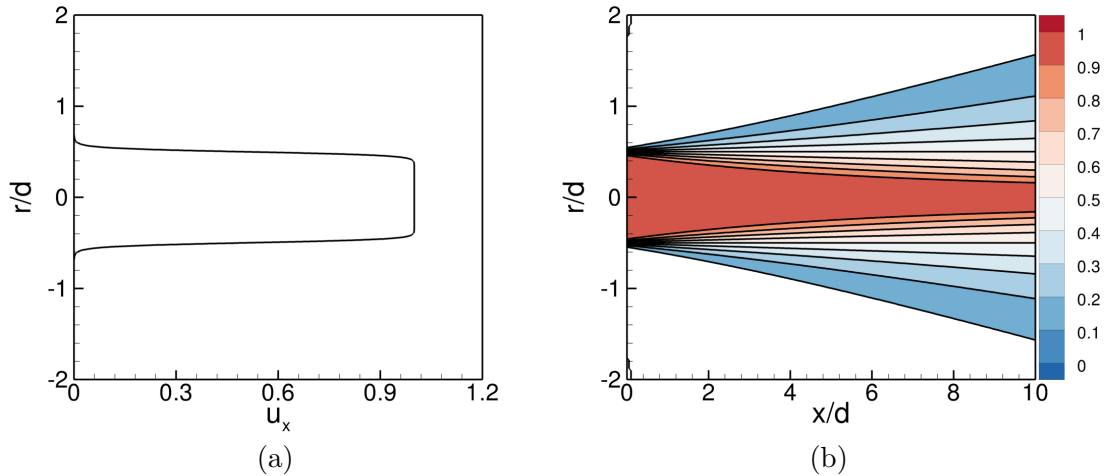


FIGURE 5.1 : Profil initial (a) et contours (b) de la vitesse axiale moyenne.

Pour ne pas introduire de singularité dans le système d'équations, l'ensemble des résultats présentés par la suite sont obtenus pour un nombre de Mach  $M_j = 0.01$ , conformément à [Piot \*et al.\* \(2006\)](#) et [Léon \(2012\)](#).

### 5.2.3 Stabilité locale adjointe

En premier lieu, une propriété importante à vérifier est que le spectre de l'opérateur local adjoint est le conjugué du spectre direct. Pour cela, on néglige les effets non parallèles à la station initiale, ce qui permet d'établir les équations de stabilité locale adjointe. Sous forme matricielle, le système d'équations obtenu est le suivant :

$$(\mathbf{A}^* + \mathbf{B}^*) \cdot \hat{\mathbf{q}}^* + \mathbf{D}^* \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{q}}^*}{\partial r} = 0 \quad (5.31)$$

avec

$$\mathbf{A}^* = \alpha^*(x) \mathbf{A}_0^* + m \mathbf{A}_1^* + n \omega \mathbf{A}_2^* \quad (5.32)$$

L'ensemble des matrices  $\mathbf{A}_0^*$ ,  $\mathbf{A}_1^*$ ,  $\mathbf{A}_2^*$ ,  $\mathbf{B}^*$  et  $\mathbf{D}^*$  sont alors uniquement fonction du champ de base et de ses dérivées radiales. L'expression analytique de ces matrices est explicitée ci-dessous :

$$\mathbf{A}_0^* = -i \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \bar{\rho} \bar{u}_x M_j^2 & 0 \\ \bar{\rho} \bar{u}_x & 0 & 0 & 0 & \bar{\rho} \\ 0 & \bar{\rho} \bar{u}_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\rho} \bar{u}_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\bar{u}_x M_j^2 & \bar{u}_x M_j^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_1^* = -\frac{i}{r} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{\rho} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_2^* = i \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \bar{\rho} M_j^2 & 0 \\ \bar{\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\rho} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -M_j^2 & M_j^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}^* = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{\rho} \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial r} & 0 & 0 & -\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}^* = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\bar{\rho} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Un calcul de stabilité locale adjointe est ainsi effectué pour le mode axisymétrique  $m = 0$  à un nombre de Strouhal  $St = 0.5$ . Les spectres de valeurs propres obtenus par stabilité locale directe et adjointe sont représentés sur la Fig. 5.2. Comme attendu, les spectres directs et adjoints se superposent. Il est important de souligner que le mode d'intérêt pour le calcul par PSE adjointes est le conjugué du  $\alpha$  direct ( $\text{Im}(\alpha^*) > 0$ ).

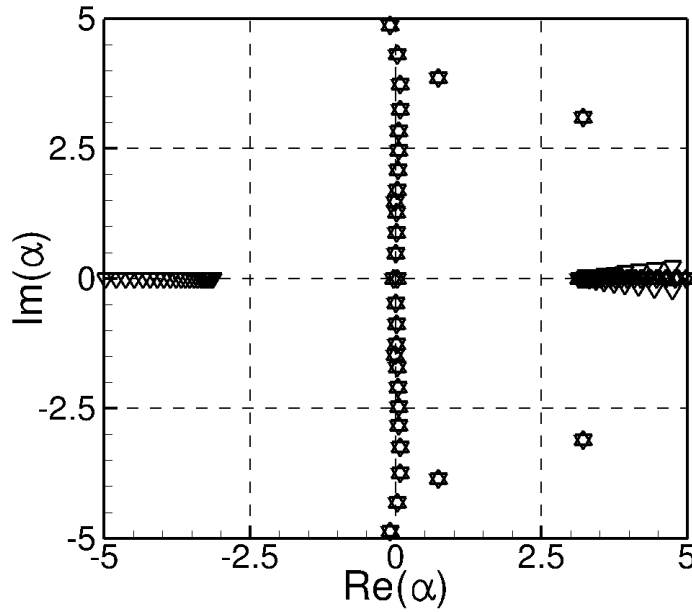


FIGURE 5.2 : Spectre de stabilité locale obtenu pour  $m = 0$  et  $St = 0.5$  à l'abscisse initiale  $x/d = 0.0$ ; ( $\triangle$ ) valeurs propres directes; ( $\nabla$ ) valeurs propres adjointes.

À cette valeur propre est associé un vecteur propre  $\hat{\mathbf{q}}^* = [\hat{u}_x^*, \hat{u}_r^*, \hat{u}_\theta^*, \hat{\rho}^*, \hat{p}^*]^T$  dont les composantes sont présentées sur la Fig. 5.3 après normalisation par le maximum d'amplitude de la variable adjointe  $\hat{u}_x^*$ . Comme pour la stabilité locale directe, les perturbations sont localisées principalement autour de la couche de mélange en  $r/d = 0.5$  et s'étendent rarement à plus de  $r/d = 1.5$ . Les variations des variables adjointes sont cependant plus brutales que celles des variables directes. Un maillage fin est donc requis, similaire à celui utilisé pour l'approche PSE non linéaire. À noter également que

la composante  $\hat{u}_\theta^*$  est nulle pour les modes axisymétriques et que les variables  $\hat{\rho}^*$  et  $\hat{p}^*$  sont égales, conformément à l'équation (5.10e).

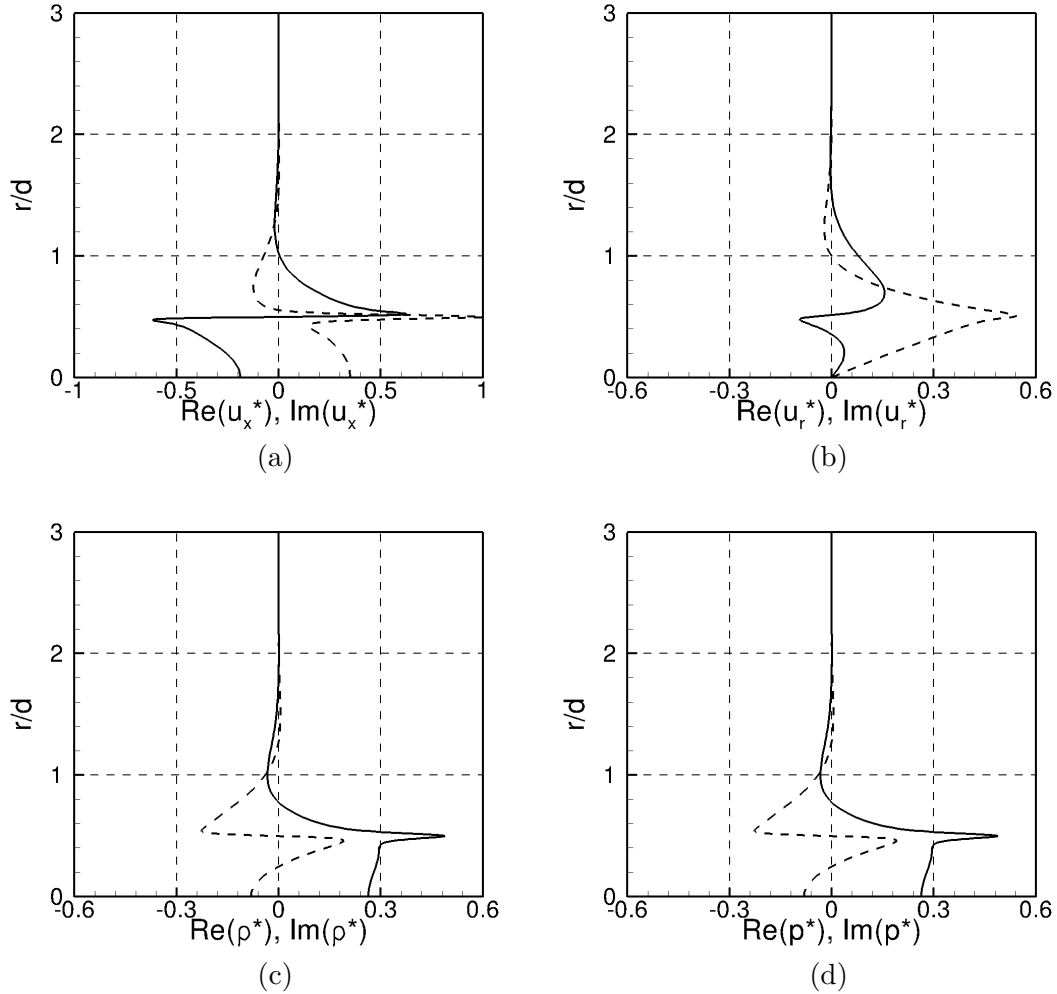


FIGURE 5.3 : Fonctions propres issues de l'analyse de stabilité locale adjointe pour  $m = 0$  et  $St = 0.5$  à la station initiale  $x/d = 0.0$  ;  
(—) Partie réelle ; (- -) Partie imaginaire.

#### 5.2.4 Analyse par PSE adjointes d'un écoulement parallèle incompressible

Avant d'appliquer notre approche par PSE adjointes sur le cas du jet incompressible, on propose de restreindre l'étude au cas d'un jet parallèle invariant en  $x$ . Le profil de vitesse axiale moyenne est donc identique pour toutes les stations axiales et la vitesse radiale moyenne  $\bar{u}_r$  est négligée. Le but est de vérifier que la valeur propre  $\alpha^*$  et que les fonctions propres  $\hat{\mathbf{q}}^*$  sont conservées à chaque station en  $x$ . L'initialisation en  $x_0$  du calcul PSE linéaire direct est réalisée par stabilité locale, la solution est ensuite propagée dans la direction axiale par une méthode de marche en  $x$  jusqu'à  $x_f = 10.0$ . En  $x_f$ , un

calcul de stabilité locale adjointe est effectué avant d'être utilisé comme condition initiale pour le calcul PSE adjoint de  $x_f$  à  $x_0$ .

Les évolutions axiales de  $\alpha$  et  $\alpha^*$  sont reportées sur la Fig. 5.4. Comme prévu, la condition  $\alpha = \alpha^{*\dagger}$  est bien vérifiée pour tout  $x$ . De même, les fonctions d'amplitude obtenues par l'approche PSE adjointe se superposent parfaitement aux résultats fournis par la stabilité locale de la Fig. 5.3.

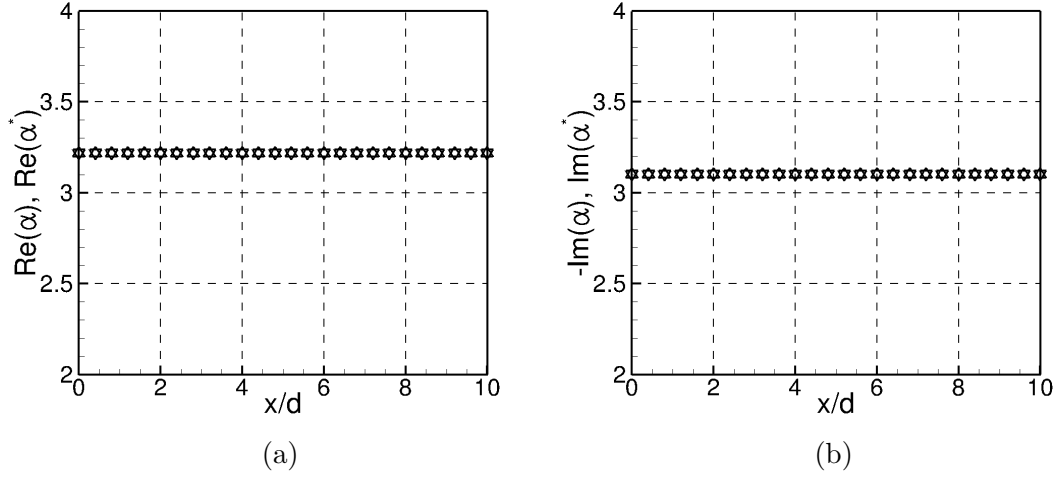


FIGURE 5.4 : Parties réelle (a) et imaginaire (b) du nombre d'onde axial ;  
( $\triangle$ ) PSE directes ; ( $\nabla$ ) PSE adjointes.

### 5.2.5 Analyse par PSE adjointes d'un jet incompressible

Une démarche similaire à l'analyse précédente est réalisée pour le cas d'un jet incompressible. Une fois de plus, la fonction coût  $\mathcal{J}$  n'est pas considérée et le calcul est initialisé par la solution de la stabilité locale adjointe. Il est donc primordial de limiter le domaine de calcul en  $x$  de sorte que le mode  $m = 0$  à la fréquence  $St = 0.50$  soit instable sur tout le domaine. L'intervalle axial choisi est  $x/d \in [0.0; 2.0]$ . Un calcul de spectre est réalisé en  $x/d = 2.0$  et représenté sur la Fig. 5.5, où la valeur propre  $\alpha^* = 4.8 + 0.5 i$  correspond au mode instable de Kelvin-Helmholtz  $\alpha = 4.8 - 0.5 i$ . Les composantes du vecteur propre associé à cette valeur propre sont présentées sur la Fig. 5.6, après normalisation par le maximum d'amplitude de la variable adjointe  $\hat{u}_x^*$ .

À partir de cette solution initiale, un calcul par PSE adjointes est réalisé de  $x/d = 2.0$  à  $x/d = 0.0$ . Malheureusement, le calcul ne converge plus une fois l'abscisse  $x/d = 0.2$  atteinte. Une comparaison de l'évolution des nombres d'ondes axiaux  $\alpha$  et  $\alpha^*$  est présentée sur la Fig. 5.7. Il est intéressant de souligner que les deux valeurs propres ne sont pas conjuguées l'une de l'autre, contrairement au cas de la stabilité locale, même si leurs valeurs sont relativement proches. De même, le phénomène transitoire que l'on observe pour le calcul direct sur la partie imaginaire de  $\alpha$  est également présent pour

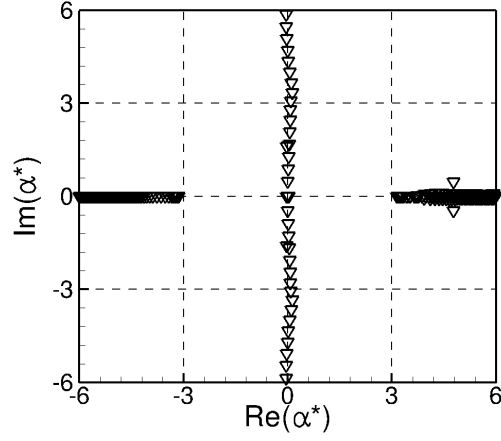


FIGURE 5.5 : Spectre de stabilité obtenu pour  $m = 0$  et  $St = 0.5$  à l'abscisse  $x/d = 2.0$  ;  
( $\nabla$ ) valeurs propres adjointes.

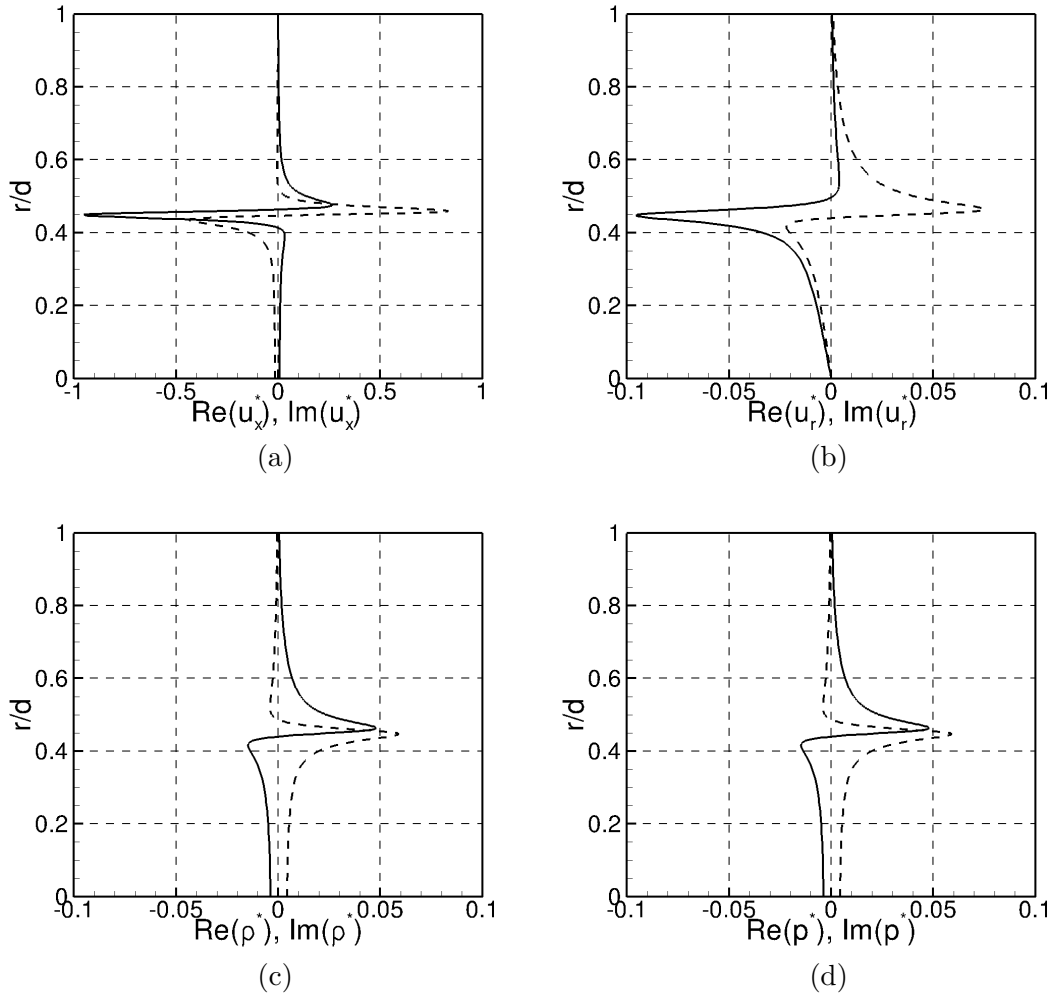


FIGURE 5.6 : Fonctions propres issues de l'analyse de stabilité locale adjointe pour  
 $m = 0$  et  $St = 0.5$  à la station  $x/d = 2.0$  ;  
(—) Partie réelle ; (- - -) Partie imaginaire.



le calcul adjoint mais sur la partie réelle de  $\alpha^*$ . Les contours de la partie réelle des

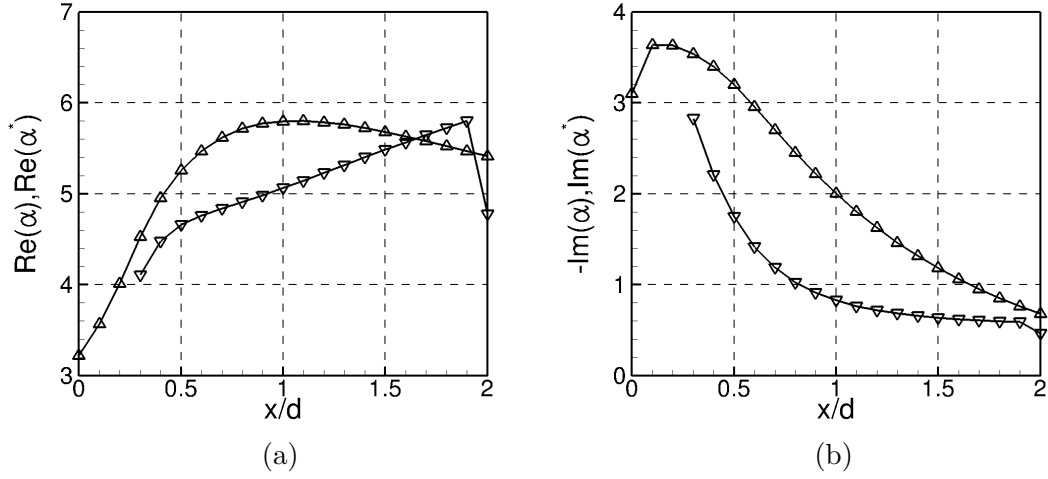


FIGURE 5.7 : Parties réelle (a) et imaginaire (b) du nombre d'onde axial;  
( $\triangle$ ) PSE directes; ( $\nabla$ ) PSE adjointes.

variables adjointes issues de l'analyse par PSE adjointes sont quant à eux représentés sur la Fig. 5.8. Les conditions aux limites sur l'axe et en champ lointain ne génèrent pas d'oscillations des composantes. De plus, il faut souligner que les variables adjointes peuvent s'apparenter à la sensibilité de l'écoulement. Comme attendu, les zones les plus sensibles de l'écoulement semble donc être principalement localisées au niveau de la couche de mélange, à proximité de la lèvre de la tuyère. Des résultats similaires ont été obtenus par [Ansaldi et Airiau \(2015\)](#). La divergence du calcul pourrait donc provenir de la variation brutale de  $\alpha^*$  à proximité de la lèvre de la tuyère avec l'augmentation de la sensibilité de l'écoulement en ce point.

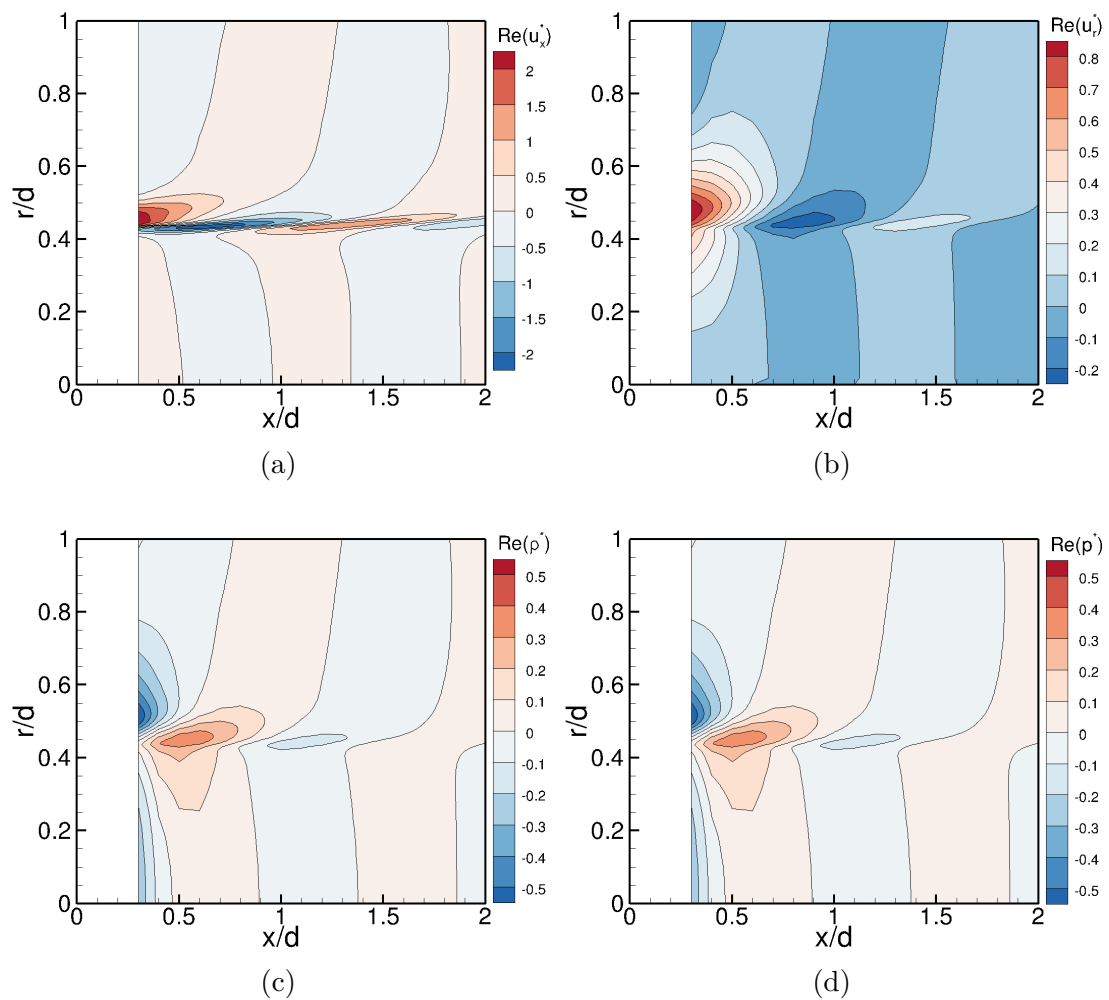


FIGURE 5.8 : Contours de la partie réelle des variables adjointes (a)  $u_x^*$ , (b)  $u_r^*$ , (c)  $p^*$  et (d)  $p^*$  issues de l'analyse par PSE adjointes pour  $m = 0$  et  $St = 0.5$ .

DANS le but de développer une technique d'optimisation efficace, une modélisation des PSE adjointes a été établie dans ce chapitre. Pour cela, une présentation de la problématique générale de l'optimisation sous contrainte a d'abord été réalisée avec pour objectif d'introduire le formalisme du Lagrangien et des variables adjointes. Une revue synthétique des applications possibles de l'approche adjointe en mécanique des fluides a également été mentionnée, où un accent particulier a été porté sur l'étude de la sensibilité. Les deux approches dites de l'adjoint continu et de l'adjoint direct ont été soulignées. Les PSE linéaires adjointes ont alors été développées à partir des équations d'Euler linéarisées compressibles adjointes, auxquelles le formalisme PSE a été appliqué avant la discrétisation. Une présentation détaillée de l'ensemble des étapes du processus itératif et des méthodes numériques retenues pour la résolution du système a été effectuée.

En premier lieu, on a vérifié que le spectre de l'opérateur adjoint est bien le conjugué du spectre direct. L'étude s'est ensuite restreinte au cas d'un jet parallèle afin de vérifier que la solution obtenue par l'approche adjointe était équivalente à celle fournie par la stabilité locale. Une application de l'approche par PSE linéaires adjointes a ensuite été proposée sur le cas d'un jet incompressible. La forte variation des fonctions propres et l'évolution axiale brutale de  $\alpha^*$  suggèrent l'importance capitale du maillage. Bien que la méthodologie mise en place semble prometteuse, le développement de ce modèle PSE adjoint n'est qu'une première étape ouvrant la voie vers de nombreuses études possibles comme la sensibilité, la réceptivité, la perturbation optimale ou le contrôle optimal des écoulements de type jet.

# Conclusions et perspectives

## Conclusions de l'étude

Les travaux conduits au cours de cette thèse s'inscrivent dans le contexte de réduction du bruit de jet, qui est la première source des nuisances sonores des avions au décollage. L'étude s'est concentrée sur l'identification et l'analyse des mécanismes de génération de bruit et plus particulièrement sur le rôle des structures turbulentes cohérentes à grande échelle. En assimilant ces structures à des ondes d'instabilité convectives, il est possible d'isoler leur contribution, notamment à l'aide des Équations de Stabilité Parabolisées (PSE). Bien que l'approche PSE linéaire fournisse des résultats satisfaisants, des questions restaient à élucider : la complexité de la turbulence rend-elle nécessaire l'emploi d'un modèle non linéaire pour décrire de manière satisfaisante l'évolution de telles structures ? Les interactions non linéaires entre les ondes d'instabilité ont-elles un impact sur la dynamique et le rayonnement acoustique des jets naturels ? Pour les jets forcés, l'excitation d'un ou plusieurs modes propres instables permet-elle d'altérer le champ hydrodynamique proche d'un jet ainsi que son rayonnement acoustique ? Une technique d'optimisation peut-elle être envisagée pour définir un contrôle optimal à appliquer en vue de minimiser le bruit rayonné ? Ces questions ont chacune motivé le développement d'un chapitre de cette étude.

Ainsi, dans un premier temps, la modélisation des instabilités hydrodynamiques des jets au moyen des PSE a été étendue pour prendre en compte les interactions possibles entre modes. Pour cela, le champ instantané a été défini comme la superposition d'un champ de base stationnaire et d'une somme de fluctuations harmoniques. De par les nombres de Reynolds considérés et l'origine non visqueuse de l'instabilité de Kelvin-Helmholtz, le modèle PSE non linéaire a été développé à partir des équations d'Euler perturbées, contrairement au modèle PSE originel où les termes visqueux sont conservés.

Suite au développement de cette modélisation, les approches PSE linéaires et non linéaires ont été appliquées à un jet naturel dans le but de déterminer si les interactions

entre les ondes d'instabilité ont un impact sur sa dynamique et son rayonnement acoustique. La configuration étudiée est celle d'un jet chaud subsonique, dit «  $\phi 80$  », pour lequel de nombreuses études expérimentales et numériques ont été effectuées à l'ONERA. Dans un premier temps, une analyse PSE linéaire a été réalisée à partir d'un champ moyen obtenu par Lorteau *et al.* (2015). La zone d'amplification des ondes d'instabilité a été correctement reproduite. En revanche, en fin de cône potentiel, un amortissement brutal des perturbations a été observé, contrairement aux mesures et à la simulation LES qui montrent des niveaux de pression constants ou en légère décroissance. Un algorithme de propagation acoustique a été utilisé pour faire rayonner en champ lointain la solution PSE obtenue en champ proche. Les résultats sont corrects à basse fréquence mais deviennent discutables pour des fréquences  $St > 0.60$ . Ensuite, l'étude par PSE non linéaires a été réalisée. L'effet de l'amplitude initiale des modes a d'abord été étudié pour vérifier si les interactions modales étaient capables d'altérer l'évolution d'un ou plusieurs modes. Ainsi, l'impact des effets non linéaires s'est révélé être principalement localisé en aval du cône potentiel. En utilisant l'amplitude réelle des modes, l'analyse PSE non linéaire a révélé que les non linéarités ont un effet mineur sur la dynamique des ondes d'instabilité, ce qui explique en partie la pertinence des résultats obtenus par les approches de stabilité linéaire. Les interactions non linéaires entre les ondes d'instabilité semblent donc négligeables dans le cas d'un jet non excité.

Toutefois, la possibilité d'altérer les champs hydrodynamique et acoustique d'un jet reste envisageable en excitant un ou plusieurs modes propres. Pour répondre à cet objectif, une étude paramétrique a été réalisée avec les PSE non linéaires en vue d'altérer le comportement d'un des modes dominants, désigné comme le mode « cible ». L'étude a été restreinte dans un premier temps aux interactions d'harmoniques fréquentielles pour  $m = 0$ , et plus particulièrement à l'excitation d'un seul mode, appelé le mode « tueur ». On a alors montré qu'il était possible d'altérer l'évolution du mode « cible » en excitant son sous-harmonique. L'excitation de deux modes a ensuite été analysée, où le phénomène de différence modale a été mis en avant. En effet, en excitant simultanément les modes  $(m_1, n_1)$  et  $(m_2, n_2)$ , il est possible d'altérer le mode  $(m_1 - m_2, n_1 - n_2)$ . L'amplitude et la phase initiale du ou des modes « tueurs » se sont révélées d'une importance cruciale. Par une analyse de type « essais-erreurs » sur les amplitudes et les phases initiales des modes « tueurs », le champ de pression proche du mode « cible » a été minimisé et, dans certains cas, son rayonnement acoustique a été réduit de façon significative. En revanche, d'un point de vue acoustique, seule une augmentation du rayonnement acoustique global a pu être observée. Ces travaux ont notamment fait l'objet d'une publication dans la revue *Physics of Fluids*.

Enfin, dans un dernier temps, une technique d'optimisation basée sur la théorie de l'opérateur adjoint a été développée pour à terme déterminer le contrôle optimal à appliquer en vue de minimiser le bruit rayonné. Dans le cas présent, les PSE adjointes

ont été développées à partir des équations d'Euler linéarisées compressibles adjointes, auxquelles le formalisme PSE a été appliqué avant la discrétisation. Le modèle par PSE linéaires adjointes a ensuite été appliqué à des cas d'études simples. Dans un premier temps, on a vérifié que le spectre de l'opérateur adjoint est bien le conjugué du spectre direct. L'étude s'est ensuite restreinte au cas d'un jet parallèle afin de vérifier que la solution obtenue par l'approche PSE adjointe était équivalente à celle fournie par la stabilité locale. Une application a ensuite été proposée sur le cas d'un jet incompressible.

En conclusion générale, nous avons identifié au moyen d'une approche PSE non linéaire que les interactions entre les ondes d'instabilité ont peu d'influence sur les champs hydrodynamique et acoustique des jets naturels. Nous avons également montré que l'excitation d'un ou plusieurs modes propres d'un jet permet d'altérer l'évolution d'un mode donné, voire dans certains cas, de réduire son rayonnement acoustique. En échange d'une augmentation du bruit à haute fréquence, ces travaux soutiennent l'idée qu'une réduction du bruit de l'onde instable initialement dominante est possible par le biais des interactions non linéaires.

## Perspectives

Nous terminons cette étude en ouvrant sur quelques perspectives. Tout d'abord, au cours de ces travaux, les perturbations stationnaires de l'écoulement de base ont été négligées. Dans le cas des jets naturels, le champ moyen calculé par LES contient déjà les perturbations stationnaires de l'écoulement de base et les calculer une fois de plus avec les PSE serait redondant. De plus, nous avons montré que l'impact des interactions non linéaires était négligeable pour les jets non excités. En revanche, ce choix est plus discutable pour l'analyse des jets excités car le forçage peut induire par non linéarité une composante stationnaire qui n'est pas prise en compte dans le champ de base. Pour quantifier l'effet des perturbations stationnaires, une approche par LES peut être envisagée. La démarche consisterait à réaliser deux simulations numériques avec et sans forçage. La différence entre les deux solutions permettrait de quantifier l'effet des non linéarités sur l'évolution des modes stationnaires. Par la même occasion, en utilisant une excitation similaire à celles utilisées dans le chapitre 3, un cas de référence pourrait être défini pour valider les approches par PSE non linéaires. Si la prise en compte des perturbations stationnaires s'avère nécessaire, une première étape consisterait à extraire le champ de base de la simulation LES. De plus, la modélisation PSE non linéaire devra alors être adaptée. Un point délicat doit cependant être mis en avant, celui de l'initialisation du mode  $(0, 0)$ . En effet, à partir de la condition de normalisation, on impose aux fonctions d'amplitude d'avoir une faible dépendance en  $x$ . Le calcul doit donc débuter avec des fonctions choisies de façon à ce qu'elles évoluent lentement dans la direction axiale. Généralement, une solution de la stabilité locale est suffisante. Cependant, pour

le mode  $(0,0)$ , la solution de la stabilité locale est identiquement nulle. La faible variation en  $x$  ne peut donc pas être respectée. Un traitement particulier du mode  $(0,0)$  devra donc être réalisé.

De plus, le modèle PSE adjoint qui a été développé n'est qu'une première étape ouvrant la voie vers de nombreuses études possibles comme la sensibilité, la réceptivité, la perturbation optimale ou le contrôle optimal des écoulements de jet. Ces études permettront certainement de définir des conditions initiales appropriées pour les technologies de contrôle des structures cohérentes et de réduction du bruit de jet à basse fréquence.

La validation expérimentale des résultats théoriques obtenus va nécessiter des actionneurs capables d'exciter le ou les modes propres désirés. Or l'interaction des actionneurs fluidiques ou par plasma avec la couche de mélange d'un jet reste encore mal connue. Il est donc nécessaire de caractériser l'effet des actionneurs afin de définir une fonction de transfert entre l'actionneur et le jet. On sera alors en mesure d'appliquer la perturbation optimale voulue.

Ces travaux soulignent une fois de plus la complémentarité des études expérimentales, numériques et de modélisation. Ces trois approches combinées ont permis d'améliorer notre compréhension des mécanismes de génération du bruit de jet et il est primordial de poursuivre ces efforts.

# Bibliographie

- K.K. AHUJA : Correlation and prediction of jet noise. *Journal of Sound and Vibration*, 29(2):155–168, 1973.
- C. AIRIAU : *Stabilité linéaire et faiblement non linéaire d’une couche limite laminaire incompressible par un système d’équations parabolisé (PSE)*. Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure de l’Aéronautique et de l’Espace, 1994.
- C. AIRIAU : Non-parallel acoustic receptivity of a Blasius boundary layer using an adjoint approach. *Flow, Turbulence and Combustion*, 65(3-4):347–367, 2000.
- C. AIRIAU, A. BOTTARO et S. WALTHER : A methodology for optimal laminar flow control : Application to the damping of Tollmien–Schlichting waves in a boundary layer. *Physics of Fluids*, 15(5):1131–1145, 2003.
- E. AKERVIK, L. BRANDT, D.S. HENNINGSON, J. HOEPFFNER, O. MARXEN et P. SCHLATTER : Steady solutions of the Navier-Stokes equations by selective frequency damping. *Physics of fluids*, 18(6):068102, 2006.
- B. ANDRÉ, T. CASTELAIN et C. BAILLY : Experimental investigation of aerodynamical and acoustical properties of an underexpanded supersonic jet with forward flight effect. *In 45ème Colloque d’Aérodynamique Appliquée : contrôle des écoulements*, 2010.
- T. ANSALDI et C. AIRIAU : Sensitivity analysis for subsonic jet using adjoint of non local stability equations. AIAA Paper 2015-2219. *In 21th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*, Dallas, June 2015.
- V.H. ARAKERI, A. KROTHAPALLI, V. SIDDAVARAM, M.B. ALKISLAR et L.M. LOURENCO : On the use of microjets to suppress turbulence in a Mach 0.9 axisymmetric jet. *Journal of Fluid Mechanics*, 490:75–98, 2003.
- H. ARBEY et J.E. FLOWCS WILLIAMS : Active cancellation of pure tones in an excited jet. *Journal of Fluid Mechanics*, 149:445–454, 1984.
- S. BAGHERI, P. SCHLATTER, P.J. SCHMID et D.S HENNINGSON : Global stability of a jet in crossflow. *Journal of Fluid Mechanics*, 624(1):33–44, 2009.
- P. BALAKUMAR : Prediction of supersonic jet noise. AIAA Paper 98-1057. *In 36th AIAA Aerospace Sciences Meeting*, Reno, January 1998.
- F.P. BERTOLOTTI et T. HERBERT : Analysis of the linear stability of compressible boundary layers using the PSE. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, 3(2):117–124, 1991.



- F.P. BERTOLOTTI, T. HERBERT et P.R. SPALART : Linear and nonlinear stability of the blasius boundary layer. *Journal of Fluid Mechanics*, 242:441–474, 1992.
- A. BIANCHERIN : *Simulation aéroacoustique d'un jet chaud subsonique*. Thèse de doctorat, Université Paris VI, 2003.
- D. BODONY et S.K. LELE : Review of the current status of jet noise predictions using large-eddy simulation (invited). AIAA Paper 2006-0486. *In 44th AIAA Aerospace Sciences Meeting*, Reno, January 2006.
- C. BOGEY, C. BAILLY et D. JUVÉ : Noise investigation of a high subsonic, moderate Reynolds number jet using a compressible Large Eddy Simulation. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, 16:273–297, 2003.
- L.J.S. BRADBURY et A.H. KHADEM : The distortion of a jet by tabs. *Journal of Fluid Mechanics*, 70(4):801–813, 1975.
- P. BRADSHAW, D.H. FERRISS et R.F. JOHNSON : Turbulence in the noise producing region of a circular jet. *Journal of Fluid Mechanics*, 19(4):591–624, 1964.
- J.Ph. BRAZIER, M. HUET, O. LÉON et M. ITASSE : Modal analysis of near-field pressure fluctuation for a cold subsonic jet. *In 50th AAAF International Conference : Applied Aerodynamics*, 2015.
- J. BRIDGES et C.A. BROWN : Parametric testing of chevrons on single flow hot jets. AIAA Paper 2004-2824. *In 10th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*, Manchester, 2004.
- G.L. BROWN et A. ROSHKO : On density effects and large structure in turbulent mixing layers. *Journal of Fluid Mechanics*, 64(4):775–816, 1974.
- B. CALLENDER et E. GUTMARK : Far-field acoustic investigation into chevron nozzle mechanisms and trends. *AIAA Journal*, 43(1):87–95, 2005.
- D. CARUANA, P. BARRICAU, P. HARDY, J.P. CAMBRONNE et A. BELINGER : The "plasma synthetic jet" actuator. Aero-thermodynamic characterization and first flow control applications, AIAA Paper 2009-1307. *In 47th AIAA Aerospace Sciences Meeting*, Orlando, January 2009.
- T. CASTELAIN, M. SUNYACH, D. JUVÉ et J.-C. BÉRA : Jet-noise reduction by impinging microjets : An acoustic investigation testing microjet parameters. *AIAA Journal*, 46(5):1081–1087, 2008.
- A.V.G. CAVALIERI, P. JORDAN, A. AGARWAL et Y. GERVAIS : Jittering wave-packet models for subsonic jet noise. *Journal of Sound and Vibration*, 330(18-19):4474–4492, 2011.
- Y.Y. CHAN : Spatial waves in turbulent jets. *Physics of Fluids*, 17(1):46–53, 1974a.
- Y.Y. CHAN : Spatial waves in turbulent jets. Part II. *Physics of Fluids*, 17(9):1667–1670, 1974b.
- Y.Y. CHAN et J.T. TEMPLIN : Suppression of spatial waves by distortion of jet velocity profile. *Physics of Fluids*, 17(11):2124–2125, 1974.

- C.L. CHANG et M.R. MALIK : Oblique-mode breakdown and secondary instability in supersonic boundary layers. *Journal of Fluid Mechanics*, 273:323–360, 1994.
- F. CHEDEVERGNE, O. LÉON, V. BODOC et D. CARUANA : Experimental and numerical response of high-Reynolds-number  $M=0.6$  jet to a Plasma Synthetic Jet actuator. *Journal of Heat and Fluid Flow*, 2015.
- L.C. CHEUNG, D.J. BODONY et S.K. LELE : Noise radiation predictions from jet instability waves using a hybrid nonlinear PSE-acoustic analogy approach. AIAA Paper 2007-3638. In *13th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*, Rome, 2007.
- G. CONSTANTINESCU et S. LELE : Large eddy simulation of a near sonic turbulent jet and its radiated noise. AIAA Paper 2001-0376. In *39th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, Reno, January 2001.
- D.G. CRIGHTON et M. GASTER : Stability of slowly diverging jet flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 77(2):397–413, 1976.
- D.G. CRIGHTON et P. HUERRE : Shear-layer pressure fluctuations and superdirective acoustic sources. *Journal of Fluid Mechanics*, 220:355–368, 1990.
- S.C. CROW et F.H. CHAMPAGNE : Orderly structure in jet turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, 48(3):547–591, 1971.
- C. DAHAN : *Émission acoustique de structures cohérentes dans un jet turbulent*. Thèse de doctorat d'état, Université de Paris VI, 1976.
- C. DAHAN : Émission acoustique de structures cohérentes dans un jet turbulent. *La recherche aérospatiale*, 2:113–126, 1977.
- P.O.A.L. DAVIES, M.J. FISHER et M.J. BARRATT : The characteristics of the turbulence in the mixing region of a round jet. *Journal of Fluid Mechanics*, 15:337–367, 1963.
- M.J. DAY, N.N. MANSOUR et W.C. REYNOLDS : Nonlinear stability and structure of compressible reacting mixing layers. *Journal of Fluid Mechanics*, 446:375–408, 2001.
- M.R. DHANAK et B. De BERNARDINIS : The evolution of an elliptic vortex ring. *Journal of Fluid Mechanics*, 109:189–216, 1981.
- P.E. DIMOTAKIS et G.L. BROWN : The mixing layer at high Reynolds number : large-structure dynamics and entrainment. *Journal of Fluid Mechanics*, 78(3):535–560, 1976.
- J.E. FLOWCS WILLIAMS : The noise from turbulence convected at high speed. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 255:469–503, 1963.
- R.E. FRANKLIN et J.H. FOXWELL : Correlation in the random pressure field close to a jet. Rapport technique No. 3161, Aeronautical Research Council, 1958.
- J.B. FREUND, S.K. LELE et P. MOIN : Direct simulation of a Mach 1.92 jet and its sound field. AIAA Paper 1998-2291. In *4th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*, Toulouse, June 1998.
- J.B. FREUND, S.K. LELE et P. MOIN : Numerical simulation of a Mach 1.92 turbulent jet and its sound field. *AIAA Journal*, 38(11):2023–2031, 2000.

- P. FREYMUTH : On transition in a separated laminar boundary layer. *Journal of Fluid Mechanics*, 25(4):683–704, 1966.
- L. GAMET, F. DUCROS, F. NICOUD et T. POINSOT : Compact finite difference schemes on non-uniform meshes. Application to direct numerical simulations of compressible flows. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 29(2):159–191, 1999.
- L. GAMET et J.L. ESTIVALEZES : Application of Large-Eddy Simulations and Kirchhoff method to jet noise prediction. *AIAA Journal*, 36(12):2170–2178, 1998.
- M. GASTER : A note on relation between temporally-increasing and spatially-increasing disturbances in hydrodynamic stability. *Journal of Fluid Mechanics*, 14(2):222–224, 1962.
- D. GÉLY, G. ELIAS, C. GRESSON, H. FOULON, S. RADULOVIC et P. ROUX : Reduction of supersonic jet noise. Application to the Ariane 5 launch vehicle. AIAA Paper 2000-2026. In *6th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*, Lahaina, June 2000.
- M.E. GOLDSTEIN : A generalized acoustic analogy. *Journal of Fluid Mechanics*, 488:315–333, 2003.
- K. GUDMUNDSSON et T. COLONIUS : Instability wave models for the near-field fluctuations of turbulent jets. *Journal of Fluid Mechanics*, 689:97–128, 2011.
- G. GUJ, M. CARLEY et R. CAMUSSI : Acoustic identification of coherent structures in a turbulent jet. *Journal of Sound and Vibration*, 259(5):1037–1065, 2003.
- M. GUNZBURGER : Sensitivities in computational methods for optimal flow control. In *Computational Methods for Optimal Design and Control*, pages 197–236, Boston, 1998.
- M. GUNZBURGER : Adjoint equation-based methods for control problems in incompressible, viscous flows. *Flow, Turbulence and Combustion*, 65:249–272, 2000.
- H. HAJ-HARIRI : Characteristics analysis of the parabolized stability equations. *Studies in Applied Mathematics*, 92(1):41–53, 1994.
- P. HARDY : *Étude et qualification aérothermodynamique et électrique d’un actionneur*. Thèse de doctorat, Université de Toulouse, 2012.
- M. HARPER-BOURNE et J. FISHER : The noise from shock waves in supersonic jets. Rapport technique CP 131, AGARD, 1974.
- T. HERBERT : Parabolized stability equations. In *AGARD, Special Course on Progress in Transition Modelling*, April 1994.
- T. HERBERT : Parabolized stability equations. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 29:245–283, 1997.
- J. HILEMAN : *Large-Scale Structures and Noise Generation in High-Speed Jets*. Thèse de doctorat, Ohio State University, 2004.
- J.I. HILEMAN, B.S. THUROW, E.J. CARABALLO et M. SAMIMY : Large-scale structure evolution and sound emission in high-speed jets : real-time visualization with simultaneous acoustic measurements. *Journal of Fluid Mechanics*, 544:277–307, 2005.

- P. HUERRE et P.A. MONKEWITZ : Absolute and convective instabilities in free shear layers. *Journal of Fluid Mechanics*, 159:151–168, 1985.
- M. HUET : Influence of boundary layers resolution on heated, subsonic, high Reynolds number jet flow and noise, AIAA Paper 2013-2141. In *19th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*, Berlin, May 2013.
- H.S. HUSAIN et F. HUSSAIN : Elliptic jets. Part 2. Dynamics of coherent structures : pairing. *Journal of Fluid Mechanics*, 233:439–482, 1991.
- H.S. HUSAIN et F. HUSSAIN : Elliptic jets. Part 3. Dynamics of preferred mode coherent structure. *Journal of Fluid Mechanics*, 248:315–361, 1993.
- F. HUSSAIN et H.S. HUSAIN : Elliptic jets. Part 1. Characteristics of unexcited and excited jets. *Journal of Fluid Mechanics*, 208:257–320, 1989.
- M. ITASSE, J.Ph. BRAZIER, O. LÉON et G. CASALIS : Parabolized Stability Equations analysis of nonlinear interactions with forced eigenmodes to control subsonic jet instabilities. *Physics of Fluids*, 27(8), 2015.
- S.A. KARABASOV, M.Z. AFSAR, T.P. HUYNES, A.P. DOWLING, W.A. McMULLAN, C.D. POKORA, G.J. PAGE et J.J. MCGUIRK : Jet noise : acoustic analogy informed by large eddy simulation. *AIAA Journal*, 48(7):1312–1325, 2010.
- M. KEARNEY-FISCHER, J.-H. KIM et M. SAMIMY : Noise control of a high Reynolds number Mach 0.9 heated jet using plasma actuators. AIAA Paper 2009-3188. In *15th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*, Miami, May 2009.
- M.R. KHORRAMI, R.L. ASH et M.R. MALIK : Application of spectral collocation techniques to the stability of swirling flows. *Journal of Computational Physics*, 81(1):206–229, 1989.
- V.F. KOPIEV, I.V. BELYAEV, M.Yu. ZAYTSEV, V.A. KOPIEV et G.A. FARANOSOV : Acoustic control of instability waves in a turbulent jet. *Acoustical Physics*, 59(1):16–26, 2013.
- A. KROTHAPALLI, L. VENKATAKRISHNAN, L. LOURENCO, B. GRESKA et R. ELAVARASAN : Turbulence and noise suppression of a high-speed jet by water injection. *Journal of Fluid Mechanics*, 491:131–159, 2003.
- E. LAURENDEAU, P. JORDAN, J. DELVILLE et J.-P. BONNET : Source-mechanism identification by nearfield-farfield pressure correlations in subsonic jets. *International Journal of Aeroacoustics*, 7(1):41–68, 2008.
- S.K. LELE : Compact finite difference schemes with spectral-like resolution. *Journal of Computational Physics*, 103(1):16–42, 1992.
- O. LÉON : *Étude du rayonnement acoustique des instabilités hydrodynamiques de jets double-flux avec les équations de stabilité parabolisées (PSE)*. Thèse de doctorat, Université de Toulouse, 2012.
- O. LÉON et J.-Ph. BRAZIER : Application of the linear Parabolized Stability Equations to a subsonic coaxial jet. AIAA Paper 2011-2839. In *17th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*, Portland, June 2011.

- O. LÉON et J.-Ph. BRAZIER : Investigation of the near and far pressure fields of dual-stream jets using an Euler-based PSE model, AIAA Paper 2013-2280. *In 19th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*, Berlin, May 2013.
- F. LI et M.R. MALIK : On the nature of PSE approximation. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, 8(4):253–273, 1996.
- M.J. Lighthill : On sound generated aerodynamically. I. General theory. *Proceedings of the Royal Society of London, Series A*, 211:564–587, 1952.
- M.J. Lighthill : On sound generated aerodynamically. II. Turbulence as a Source of Sound. *Proceedings of the Royal Society of London, Series A*, 222:1–32, 1954.
- G.M. LILLEY : On the noise from jets. Rapport technique CP 131, 1974.
- G.M. LILLEY : The radiated noise from isotropic turbulence. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, 6(5-6):281–301, 1994.
- M. LORTEAU : *Identification et analyse des mécanismes de génération du bruit de jet à partir de résultats expérimentaux et de simulations numériques*. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie, 2015.
- M. LORTEAU, F. CLÉRO et F. VUILLOT : Analysis of noise radiation mechanisms in hot subsonic jet from a validated large eddy simulation solution. *Physics of Fluids*, 27(7), 2015.
- M. LORTEAU, F. CLÉRO et F. VUILLOT : Experimental analysis of the near field pressure of a single stream subsonic jet, AIAA Paper 2013-2189. *In 19th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*, Berlin, May 2013.
- M. LORTEAU, F. CLÉRO et F. VUILLOT : Recent progress in les computation for aeroacoustics of turbulent hot jet. comparison to experiments and near field analysis., AIAA Paper 2013-2189. *In 20th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*, Atlanta, June 2014.
- J.-M. LUCAS : *Spatial optimal perturbations for transient growth analysis in three-dimensional boundary layers*. Thèse de doctorat, Université de Toulouse, 2014.
- J.L. LUMLEY : The structure of inhomogeneous turbulent flows. *In International Colloquium on Atmospheric turbulence and radio wave propagation*, pages 167–178, Nauka, 1967.
- M.R. MALIK et C.L. CHANG : Nonparallel and nonlinear stability of supersonic jet flow. *Computers and Fluids*, 29(3):327–365, 2000.
- G.E. MATTINGLY et C.L. CHANG : Unstable waves on an axisymmetric jet column. *Journal of Fluid Mechanics*, 65(3):541–560, 1974.
- D.K. McLAUGHLIN, G.L. MORRISON et T.R. TROUTT : Experiments on the instability waves in a supersonic jet and their acoustic radiation. *Journal of Fluid Mechanics*, 69:73–95, 1975.
- E.L. MOLLO-CHRISTENSEN, M.A. KOLPIN et J.R. MARTUCCELLI : Experiments on jet flows and jet noise far-field spectra and directivity patterns. *Journal of Fluid Mechanics*, 18(2):285–301, 1964.

- C.J. MOORE : The role of shear-layer instability waves in jet exhaust noise. *Journal of Fluid Mechanics*, 80(2):321–367, 1977.
- C.L. MORFEY, V.M. SZEWCZYK et B.J. TESTER : New scaling laws for hot and cold jet mixing noise based on a geometric acoustics model. *Journal of Sound and Vibration*, 61(2):255–292, 1978.
- P.J. MORRIS et K. VISWANATHAN : Jet noise. In *CISM Courses and Lectures : Noise sources in turbulent shear flows*, 2011.
- G.L. MORRISON et D.K. MCCLAUGHLIN : Instability process in low Reynolds number supersonic jets. *AIAA Journal*, 18(7):793–800, 1980.
- F. MULLER : *Simulations de jets propulsifs : application à l'identification des mécanismes générateurs de bruit*. Thèse de doctorat, Université Paris VI, 2006.
- F. MULLER, F. VUILLOT, G. RAHIER, G. CASALIS et E. PIOT : Experimental and numerical investigation of the near field pressure of a high subsonic hot jet. AIAA Paper 2006-2535. In *12th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*, Cambridge, MA, 2006.
- R.T. NAGEL, J.W. DENHAM et A.G. PAPATHANASIOU : Supersonic jet screech tone cancellation. *AIAA Journal*, 21(5):1541–1545, 1983.
- T.D. NORUM : Screech suppression in supersonic jets. *AIAA Journal*, 21(2):235–240, 1983.
- T.D. NORUM et J.M. SEINER : Measurements of mean static pressure and far field acoustics of shock-containing supersonic jets. Rapport technique NASA TM-84521, 1982.
- E. PIOT, G. CASALIS, F. MULLER et Ch. BAILLY : Investigation of the PSE approach for subsonic and supersonic hot jets. Detailed comparisons with LES and Linearized Euler Equations results. *International Journal of Aeroacoustics*, 5(4):361–393, 2006.
- P. PLASCHKO : Helical instabilities of slowly divergent jets. *Journal of Fluid Mechanics*, 92:209–215, 1979.
- A. POWELL : On the mechanism of choked jet noise. *Proceedings of the Physical Society of London*, B66(12):1039–1057, 1953.
- J.O. PRALITS, C. AIRIAU, A. HANIFI et D.S. HENNINGSON : Sensitivity analysis using adjoint parabolized stability equations for compressible flows. *Flow, Turbulence and Combustion*, 65(3-4):321–346, 2000.
- G. RAMAN : Cessation of screech in underexpanded jets. *Journal of Fluid Mechanics*, 33:69–90, 1997.
- G. RAMAN et E.J. RICE : Axisymmetric jet forced by fundamental and subharmonic tones. *AIAA Journal*, 29(7):1114–1122, 1991.
- H.S. RIBNER : Quadrupole correlations governing the pattern of jet noise. *Journal of Fluid Mechanics*, 38(1):1–24, 1969.

- D. RODRÍGUEZ, A. SAMANTA, A.V.G. CAVALIERI, T. COLONIUS et P. JORDAN : Parabolized stability equation models for predicting large-scale mixing noise of turbulent round jets. AIAA Paper 2011-2838. In *17th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*, Portland, June 2011.
- D. RONNEBERGER et U. ACKERMANN : Experiments on sound radiation due to non-linear interaction of instability waves in a turbulent jet. *Journal of Sound and Vibration*, 62(1):121–129, 1979.
- A.M. SALGADO, A. AGARWAL, V. SUPONITSKY et N.D. SANDHAM : Non-linear PSE analysis of subsonic jet noise. In *17th International Congress on Sound and Vibration*, Cairo, July 2010a.
- A.M. SALGADO, A. AGARWAL, V. SUPONITSKY et N.D. SANDHAM : A non-linear PSE-based model for jet noise. AIAA Paper 2010-3969. In *16th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*, Stockholm, June 2010b.
- M. SAMIMY, I. ADAMOVICH, B. WEBB, J. KASTNER, J. HILEMAN, S. KESHAV et P. PALM : Development and characterization of plasma actuators for high-speed jet control. *Experiments in Fluids*, 37(4):577–588, 2004.
- M. SAMIMY, J.H. KIM, J. KASTNER, I. ADAMOVICH et Y. UTKIN : Active control of high-speed and high-Reynolds-number jets using plasma actuators. *Journal of Fluid Mechanics*, 578:305–330, 2007.
- M. SAMIMY, M.F. REEDER et K.B. ZAMAN : Supersonic jet mixing enhancement by vortex generators. AIAA Paper 1991-2263. In *27th SAE, ASME and ASEE Joint Propulsion Conference*, Sacramento, June 1991.
- N.D. SANDHAM, C.L. MORFEY et Z.W. HU : Sound radiation from exponentially growing and decaying surface waves. *Journal of Sound and Vibration*, 294(1-2):355–361, 2006.
- W.S. SARIC et A.H. NAYFEH : Nonparallel stability of boundary-layer flows. *Physics of Fluids*, 18(8):945–950, 1975.
- J. SCHULZE, P. SCHMID et J. SESTERHENN : Iterative optimization based on an objective functional in frequency-space with application to jet-noise cancellation. *Journal of Computational Physics*, 230(15):6075–6098, 2011.
- P.M. SHERMAN, D.R. GLASS et K.G. DULEEP : Jet flow field during screech. *Applied Scientific Research*, 32(3):283–303, 1976.
- A. SINHA, D. RODRÍGUEZ, G. BRÈS et T. COLONIUS : Wavepacket models for supersonic jet noise. *Journal of Fluid Mechanics*, 742:71–95, 2014.
- J. STROMBERG, D.K. McLAUGHLIN et T.R. TROUTT : Flow field and acoustic properties of a Mach number 0.9 jet at low Reynolds number. *Journal of Sound and Vibration*, 72:159–176, 1980.
- T. SUZUKI et T. COLONIUS : Instability waves in a subsonic round jet detected using a near-field phased microphone array. *Journal of Fluid Mechanics*, 565:197–226, 2006.
- C.K.W. TAM : Directional acoustic radiation from a supersonic jet generated by shear layer instability. *Journal of Fluid Mechanics*, 46(4):757–768, 1971.

- C.K.W. TAM et D.E. BURTON : Sound generated by instability waves of supersonic flows. Part 1 : Two-dimensional mixing layers. *Journal of Fluid Mechanics*, 138:249–271, 1984a.
- C.K.W. TAM et D.E. BURTON : Sound generated by instability waves of supersonic flows. Part 2 : Axisymmetric jets. *Journal of Fluid Mechanics*, 138:273–295, 1984b.
- C.K.W. TAM, M. GOLEBIOWSKI et J.M. SEINER : On the two components of turbulent mixing noise from supersonic jets. AIAA Paper 1996-1716. In *2nd AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*, State College, May 1996.
- H.K. TANNA : An experimental study of jet noise. Part II : shock associated noise. *Journal of Sound and Vibration*, 50(3):429–444, 1977.
- K.W. THOMPSON : Time dependent boundary conditions for hyperbolic systems. *Journal of Computational Physics*, 68(1):1–24, 1987.
- C.E. TINNEY et P. JORDAN : The near pressure field of co-axial subsonic jets. *Journal of Fluid Mechanics*, 611:175–204, 2008.
- A. TOWNE, T. COLONIUS, P. JORDAN, A. CAVALIERI et G.A. BRÈS : Stochastic and nonlinear forcing of wavepackets in a Mach 0.9 jet, AIAA Paper 2015-2217. In *21th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*, Dallas, June 2015.
- T.R. TROUTT et D.K. McLAUGHLIN : Experiments on the flow and acoustic properties of a moderate-Reynolds-number supersonic jet. *Journal of Fluid Mechanics*, 116:123–156, 1982.
- O. VERMEERSCH : *Étude et modélisation du phénomène de croissance transitoire pour des couches limites incompressibles et compressibles..* Thèse de doctorat, Université de Toulouse, 2009.
- H. VIETS et P.M. SFORZA : Dynamics of bilaterally symmetric vortex rings. *Physics of Fluids*, 15(2):230–240, 1972.
- Y.C. VIGNERON, J.V. RAKICH et J.C. TANNEHILL : Calculation of supersonic viscous flow over delta wings with sharp subsonic leading edges. AIAA Paper 1978-1137. In *11th AIAA Fluid and Plasma Dynamics Conference*, Southampton, March 1978.
- K. VISWANATHAN : Aeroacoustics of hot jets. *Journal of Fluid Mechanics*, 516:39–82, 2004.
- S. WALTHER, C. AIRIAU et A. BOTTARO : Optimal control of Tollmien–Schlichting waves in a developing boundary layer. *Physics of Fluids*, 13(7), 2001.
- R. WESTLEY et G.M. LILLEY : An investigation of the noise from a small jet and methods for its reduction. Rapport technique No. 53, College of Aeronautics, Cranfield, 1952.
- C.D. WINANT et F.K. BROWAND : Vortex pairing : the mechanism of turbulent mixing-layer growth at moderate Reynolds number. *Journal of Fluid Mechanics*, 63:237–255, 1974.
- A. WITKOWSKA, D. JUVÉ et J.G. BRASSEUR : Numerical study of noise from isotropic turbulence. *Journal of Computational Acoustics*, 5(3):317–336, 1997.



- C.C. YEN et N.L. MESSERSMITH : Application of Parabolized Stability Equations to the prediction of jet instabilities. *AIAA Journal*, 36(8):1541–1544, 1998.
- C.C. YEN et N.L. MESSERSMITH : The use of compressible parabolized stability equations for prediction of jet instabilities and noise. AIAA Paper 99-1859. In *5th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*, Bellevue, May 1999.
- C.J. YU et S.D. DOSANJH : Noise field of a supersonic Mach 1.5 cold model jet. *Journal of the Acoustical Society of America*, 51:1400–1410, 1972.
- A.J. YULE : Large-scale structure in the mixing layer of a round jet. *Journal of Fluid Mechanics*, 89:413–432, 1978.
- K.B.M.Q. ZAMAN, M.F. REEDER et M. SAMIMY : Supersonic jet mixing enhancement by 'delta-tabs'. In *28th SAE, ASME and ASEE Joint Propulsion Conference*, Nashville, July 1992.
- E. ZOPPELLARI et D. JUVÉ : Reduction of hot supersonic jet noise by water injection. AIAA Paper 98-30805. In *4th AIAA/CEAS Aeroacoustic Conference*, Toulouse, June 1998.



---

## Effet sur le bruit de jet de l'excitation de modes instables : Rôle des interactions non linéaires

### Résumé

Cette étude s'inscrit dans l'effort de réduction des nuisances sonores des avions au décollage. Une des principales composantes est le bruit de jet, dont la partie à basse fréquence peut notamment être imputée au rayonnement acoustique directif des structures cohérentes de grande échelle engendrées par les instabilités dans la couche de mélange du jet. L'évolution de ces ondes d'instabilité peut être décrite au moyen des Équations de Stabilité Parabolisées (PSE). Un premier objectif a été de déterminer si dans le cas d'un jet turbulent naturel, les interactions non linéaires entre les ondes d'instabilité ont un impact significatif sur sa dynamique et sur son rayonnement acoustique. À cet effet, une modélisation PSE non linéaire a été développée et appliquée à une configuration réaliste. La possibilité de manipuler ces ondes d'instabilité par non linéarité a ensuite été étudiée en vue d'une réduction du rayonnement acoustique. Pour cela, une analyse PSE a été menée pour déterminer l'effet sur le bruit de jet de l'excitation d'un ou plusieurs modes instables. Ces travaux de thèse ont permis de montrer, d'une part, que les non linéarités semblent avoir un impact mineur sur la dynamique des ondes d'instabilité dans le cas des jets turbulents naturels, et d'autre part, qu'il est possible de réduire le rayonnement acoustique des modes dominants par interactions non linéaires.

**Mots-clés :** aéroacoustique, bruit de jet, jet turbulent, structures cohérentes de grande échelle, ondes d'instabilité, équations de stabilité parabolisées, interactions non linéaires.

---

## Effect of unstable modes excitation on jet noise: The role of nonlinear interactions

### Abstract

This study is part of the effort to reduce aircraft noise during take-off. Jet noise is one of the main contributors, of which lower frequency component can be attributed to the directive acoustic field generated by the large-scale coherent structures arising from jet mixing-layer instabilities. The development of these instability waves can be described using Parabolized Stability Equations (PSE). A first objective was to determine if in the case of a natural turbulent jet, nonlinear interactions between instability waves have a significant impact on its dynamic and acoustic behaviour. For this purpose, a nonlinear PSE model has been developed and applied to a realistic configuration. Then, the possibility to manipulate these instability waves by means of nonlinearity was investigated with a view to reduce noise. To this end, a PSE analysis has been carried out to assess the impact on jet noise of exciting one or more unstable modes. The findings of this doctoral work demonstrate a minor impact of nonlinearities on the dynamics of instability waves for natural turbulent jets on the one hand, and the possibility to make the initially dominant instability acoustically ineffective using nonlinear interactions on the other hand.

**Keywords:** aeroacoustics, jet noise, turbulent jet, large-scale coherent structures, instability waves, parabolized stability equations, nonlinear interactions.

---